УДК 519.715 + 681.514

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В.А. Бойченко

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: victor@ipu.ru

Ключевые слова: линейные стохастические системы, $\mathcal{H}_\infty$ норма, σ-энтропийная норма.

Аннотация: В работе рассматривается спектральный метод анализа стохастических систем на основе интегральной характеристики входного сигнала – σ-энтропии. В качестве критерия качества используется σ-энтропийная норма системы, которая определяется как индуцированная норма на множестве входных сигналов, σ-энтропия которых не превышает заданного значения s.

1. Линейная дискретная система

Рассмотрим объект, который описывается линейной дискретной стационарной системой с нулевыми начальными условиями:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bw_k, & x_0 = 0, \\ z_k \quad = Cx_k + Dw_k, & k = 0, 1, 2, \ \ldots, \end{cases} \tag{1}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния объекта, $z_k \in \mathbb{R}^p$ – целевой выход, $w_k \in \mathbb{R}^m$ – внешнее случайное возмущение. Предполагается, что матрица A является асимптотически устойчивой, система управляема и наблюдаема, а входная последовательность $W = \{w_k\}_{0\leqslant k<+\infty}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\mathbf{E}\left[w_k\right] = 0, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}\Big[\big|w_k\big|^2\Big] < \infty. \tag{2}$$

Определим среднеквадратичный коэффициент усиления Θ для системы (1) и входной последовательности W, которая удовлетворяет (2), как отношение l_2 нормы выходной последовательности $\{z_k\}$ к l_2 норме входной последовательности $\{w_k\}$:

$$\Theta = \frac{\big\|z_k\big\|_2}{\big\|w_k\big\|_2} = \frac{\sqrt{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}\Big[\big|z_k\big|^2\Big]}}{\sqrt{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}\Big[\big|w_k\big|^2\Big]}}\,,$$

где $|w_k|$ – евклидова норма вектора w_k в $\mathbb{R}^m$. Определим автокорреляционную свёртку $K(l)$ входной последовательности $\{w_k\}$ следующим образом:

$$K(l) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}\big[w_{k+l}\, w_k^{\mathrm{T}}\big]$$

Выполним Фурье преобразование автокорреляционной свёртки

$$S(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} K(l)\, \mathrm{e}^{-i\omega l}.$$

Обратное преобразование Фурье позволяет стандартный способом выразить автокорреляционную свёртку $K(l)$ через матрицу спектральной плотности $S(\omega)$

$$K(l) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} S(\omega)\, \mathrm{e}^{i\omega l} d\omega$$

и тогда l_2 норма входной последовательности $\{w_k\}$ будет равна

$$\big\|w_k\big\|_2^2 = \operatorname{tr} K(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} S(\omega)\, d\omega.$$

Соответственно, l_2 норма выходной последовательности $\{z_k\}$ равна

$$\big\|z_k\big\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} S_z(\omega)\, d\omega,$$

где $S_z(\omega)$ – спектральная плотность выходной последовательности $\{z_k\}$, которая выражается через передаточную матрицу $G(s) = C(sI - A)^{-1} + D$ системы (1) и спектральную плотность $S(\omega)$ входного сигнала следующим образом [2]:

$$S_z(\omega) = \widehat{G}(\omega) S(\omega) \widehat{G}^*(\omega),$$

здесь $\widehat{G}(\omega) = \lim\limits_{r\to 1-0} G(re^{i\omega})$ – значение передаточной функции $G(s)$ на единичной окружности. Тогда квадрат коэффициента усиления Θ будет равен

$$\Theta^2 = \frac{\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr}\big[\widehat{G}(\omega) S(\omega) \widehat{G}^*(\omega)\big]\, d\omega}{\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} S(\omega)\, d\omega} = \frac{\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr}\big[\Lambda(\omega) S(\omega)\big]\, d\omega}{\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} S(\omega)\, d\omega}, \tag{3}$$

где $\Lambda(\omega) = \widehat{G}^*(\omega)\widehat{G}(\omega)$. Следуя работе [1], введём интегральную характеристику входной последовательности – σ-энтропию

$$\mathfrak{S}(S) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \ln\det \frac{S(\omega)}{\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} S(\omega)\, d\omega}\, d\omega \tag{4}$$

и определим σ-энтропийную норму $\left|\!\left|\!\left|F\right|\!\right|\!\right|_s$ системы (1–2) как максимум коэффициента усиления (3) по всем входам, σ-энтропия (4) которых не превышает заданного значения s:

$$\left|\!\left|\!\left|F\right|\!\right|\!\right|_s^2 = \sup_{\mathfrak{S}(S)\leqslant s} \Theta^2 = \sup_{\mathfrak{S}(S)\leqslant s} \frac{\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr}\left[\Lambda(\omega)S(\omega)\right] d\omega}{\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} S(\omega)\, d\omega}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Для любого $s \geqslant 0$ σ-энтропийная норма (5) системы (1), на вход которой поступает стохастический дискретный сигнал с конечной l_2 нормой (2), вычисляется по формуле*

$$\left|\!\left|\!\left|F\right|\!\right|\!\right|_s^2 = \frac{\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr}\left\{\Lambda(\omega)\left[I - q\Lambda(\omega)\right]^{-1}\right\} d\omega}{\int\limits_{-\pi}^{+} \operatorname{tr}\left[I - q\Lambda(\omega)\right]^{-1} d\omega},$$

где параметр $q \in \left[0, \max\limits_{\omega} \lambda_{\max}^{-1}(\omega)\right)$ и является единственным решением уравнения

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \ln\det \frac{\left[I-q\Lambda(\omega)\right]^{-1}}{\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr}\left[I-q\Lambda(\omega)\right]^{-1} d\omega}\, d\omega = s.$$

2. Линейная непрерывная система

Рассмотрим объект, который описывается линейной стационарной системой с непрерывным временем и нулевыми начальными условиями:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,w(t), & x(0) = 0, \\ z(t) = C\,x(t) + D\,w(t), \end{cases} \tag{6}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – асимптотически устойчивая матрица, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния объекта, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ – внешний случайный сигнал, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ – наблюдаемый выход. Предполагается, что система является управляемой и наблюдаемой, а случайный сигнал $w(t)$ ограничен по L_2 норме $\left\|w(t)\right\|_2$:

$$\left\|w(t)\right\|_2 = \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}\left[\left|w(t)\right|^2\right] dt} < \infty. \tag{7}$$

Определим коэффициент усиления Θ для системы (6) и входного сигнала (7) как отношение L_2 нормы выходного сигнала $z(t)$ к L_2 норме входного сигнала $w(t)$:

$$\Theta = \frac{\left\|z(t)\right\|_2}{\left\|w(t)\right\|_2} = \frac{\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}\left[\left|z(t)\right|^2\right] dt}}{\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}\left[\left|w(t)\right|^2\right] dt}},$$

по аналогии с дискретным случаем определим автокорреляционную свёртку $K(\tau)$ входного сигнала $K(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}\big[w(t+\tau)w^{\mathrm{T}}(t)\big]\,dt$, выполним ее Фурье преобразование $S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\tau)\,\mathrm{e}^{-i\omega\tau}d\tau$ и выразим L_2 норму сигнала $w(t)$ через матрицу спектральной плотности $S(\omega)$:

$$\big\|w(t)\big\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tr}\,S(\omega)\,d\omega.$$

Соответственно, L_2 норма выходного сигнала $z(t)$ равна

$$\big\|z(t)\big\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tr}\,S_z(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tr}\big[G(i\omega)S(\omega)G^*(i\omega)\big]\,d\omega,$$

где спектральная плотность $S_z(\omega)$ выходного сигнала $z(t)$ определяется согласно [3] через передаточную матрицу $G(s) = C(sI - A)^{-1} + D$ системы (6) и спектральную плотность $S(\omega)$ входного сигнала. Следовательно, квадрат коэффициента усиления Θ будет равен

$$\Theta^2 = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tr}\big[G(i\omega)S(\omega)G^*(i\omega)\big]\,d\omega}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tr}\,S(\omega)\,d\omega} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tr}\big[\Lambda(\omega)S(\omega)\big]\,d\omega}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tr}\,S(\omega)\,d\omega}. \tag{8}$$

Теперь по аналогии с дискретным случаем введём интегральную характеристику входного сигнала – σ-энтропию. Казалось бы, что естественно было бы определить σ-энтропию непрерывного сигнала следующим образом:

$$\mathfrak{S}(S) = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln\det\frac{S(\omega)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tr}\,S(\omega)\,d\omega}\,d\omega. \tag{9}$$

Однако такое определение не совсем корректно: дело в том, что конечность L_2 нормы (7) сигнала не обеспечивает интегрируемость σ-энтропии (9). Действительно, пусть $S(\omega)$ является рациональной функцией, тогда из её интегрируемости следует асимптотика $S(\omega) \sim \omega^{-\alpha}S_\infty$ при $\omega \to \infty$, где $\alpha \geqslant 2$ и S_∞ – некоторая матрица. Но такая асимптотика ведёт к расходимости интеграла (9), поскольку

$$\ln\det S(\omega) = \ln\det S_\infty - \alpha m\ln\omega + O(\omega^{-1}), \quad \omega \to \infty$$

и, следовательно, функция $\ln\det S(\omega)$ не интегрируема. Чтобы справиться с этой расходимостью, немного модифицируем определение σ-энтропии:

$$\mathfrak{S}(S) = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega_0,\omega)\ln\det\frac{S(\omega)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tr}\,S(\omega)\,d\omega}\,d\omega, \tag{10}$$

где функция $\varphi(\omega_0,\omega) > 0$ такая, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega_0,\omega)\, d\omega < \infty$. Иначе говоря, функция $\varphi(\omega_0,\omega)$ должна обеспечивать интегрируемую асимптотику при $\omega \to \infty$. Например, $\varphi(\omega_0,\omega)$ можно выбрать в виде

$$\varphi(\omega_0,\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2+\omega^2} \quad \text{или} \quad \varphi(\omega_0,\omega) = \frac{1}{\exp\dfrac{\omega^2-\omega_0^2}{(\vartriangle\omega)^2}+1}.$$

И наконец, определим σ-энтропийную норму $|\!|\!| F |\!|\!|_s$ системы (6) как максимум коэффициента усиления (8) по всем входам, σ-энтропия $\mathfrak{S}(S)$ которых не превышает заданного значения s:

$$|\!|\!| F |\!|\!|_s^2 = \sup_{\mathfrak{S}(S)\leqslant s} \Theta^2 = \sup_{\mathfrak{S}(S)\leqslant s} \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr}\big[\Lambda(\omega)S(\omega)\big]\, d\omega}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr} S(\omega)\, d\omega}. \tag{11}$$

Теорема 2. *Для любого $s \geqslant 0$ σ-энтропийная норма (11) системы (6), на вход которой поступает непрерывный стохастический сигнал с конечной L_2 нормой (7), вычисляется по формуле*

$$|\!|\!| F |\!|\!|_s^2 = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega_0,\omega) \operatorname{tr}\Big\{\Lambda(\omega)\big[I - q\Lambda(\omega)\big]^{-1}\Big\}\, d\omega}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega_0,\omega) \operatorname{tr}\big[I - q\Lambda(\omega)\big]^{-1} d\omega},$$

где параметр $q \in \Big[0,\ \max\limits_{\omega} \lambda_{\max}^{-1}(\omega)\Big)$ и является единственным решением уравнения

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega_0,\omega) \ln\det \frac{\varphi(\omega_0,\omega)\big[I - q\Lambda(\omega)\big]^{-1}}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega_0,\omega) \operatorname{tr}\big[I - q\Lambda(\omega)\big]^{-1} d\omega}\, d\omega = s.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-08-00185 А.

Список литературы

1. Бойченко В.А. Новый подход к анализу линейных систем управления // Материалы XIV Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого). М.: ИПУ РАН, 2018. С. 81-84.
2. Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В. Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // Доклады Академии наук. 1995. Т. 342, № 5. С. 583-585.
3. Zhou K., Glover K., Bodenheimer B., Doyle J. Mixed $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ Performance Objectives I: Robust Performance Analysis // IEEE Transactions on Automatic Control. 1994. Vol. 39, No. 8. P. 1564-1574.