УДК 517.977.1

МЕТОД СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ФИЛЬТРА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М.А. Каменщиков

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: mkamenshchikov@cs.msu.ru

И.В. Капалин

Факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова, кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления

Россия, 119991 ГСП-1 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, факультет ВМК

E-mail: ikapalin@gmail.com

Ключевые слова: функциональный фильтр, передаточная функция, несмещенная оценка, пониженный порядок, установившаяся среднеквадратическая ошибка, задача оптимизации.

Аннотация: В докладе рассматривается тесно связанная с классической задачей оптимальной несмещенной фильтрации совместная задача стабилизации и оптимальной фильтрации. Предложено сведение данной задачи к задаче нелинейной оптимизации. Дано обобщение классического условия несмещенности фильтра.

1. Введение

Данный доклад посвящен методу построения оптимального функционального фильтра для стохастической линейной стационарной системы. Критерием оптимальности является среднеквадратический функционал ошибки наблюдения. Задача фильтрации играет важную роль при решении задач управления, в частности, при стабилизации линейной системы с шумами. Так, ставится задача стабилизации для системы вида

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Ax + Bu + w(t), \quad x(0) = x_0, \\ y & = & Cx + v(t), \end{array} \right. \tag{1}
$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, $y \in \mathbb{R}^l$ — измеряемый выход, $u \in \mathbb{R}^r$ — назначаемое управление, A, B и C — постоянные матрицы соответствующих размеров, x_0 — случайная величина и $w(t)$, $v(t)$ — белые шумы с вероятностными характеристиками: $E[x_0] = \bar{x}_0$, $E[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T] = P_0$, $E[w(t)] = 0$, $E[v(t)] = 0$,

$E[w(t)w(t')^T] = Q\delta(t-t')$, $E[v(t)v(t')^T] = R\delta(t-t')$, $E[w(t)v(t')^T] = 0$. Здесь Q, P_0 — положительно полуопределенные матрицы, R — положительно определенная матрица; случайная величина x_0 не коррелированна с шумами $w(t)$, $v(t)$. Первое уравнение в системе (1) понимается в смысле стохастического дифференциального уравнения [1, с. 65].

Под задачей стабилизации понимают задачу выбора управления $u = u(y,\ t)$, обеспечивающего асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Одним из классических способов выбора управления является принцип разделения задач стабилизации и наблюдения, приводящий к управлению $u = -K\hat{x}$, где $K \in \mathbb{R}^{r\times n}$ и $\hat{x}$ — оценка оптимального полноразмерного наблюдателя, получаемая фильтром Калмана–Бьюси. С теоретической точки зрения этот способ ясен и прост, однако можно считать недостатком тот факт, что размерность наблюдателя близка к размерности системы. При этом понижение размерности наблюдателя позволяет снизить как требовательность к ресурсам вычислительного устройства, на котором он реализуется, так и понизить время на вычисление оценки $\hat{x}$. Кроме того, невысокий порядок системы позволяет упростить анализ поведения динамической системы. Таким образом, предпочтительнее использовать управление вида $u = -\widetilde{z} = -z + e$, где

$$(2) \qquad z = Fx, \quad z \in \mathbb{R}^r, \quad F \in \mathbb{R}^{r\times n},$$

$\widetilde{z}$, e — оценка и ошибка оценивания вектор-функционала z, соответственно. Матрица F может быть вычислена, например, по желаемому спектру замкнутой системы, либо она может быть свободным параметром в совместной задаче стабилизации и оптимальной фильтрации.

В работе [2], посвященной в большей степени линейным детерминированным системам, ставится задача оценки вектор–функционала; для этих задач предложен анализ и синтез функциональных наблюдателей. Для линейных нестационарных стохастических систем предложены [3, 4] критерии существования оптимального функционального фильтра и метод его вычисления. При этом в работе [3] рассматривается среднеквадратический критерий оптимальности в каждый момент времени t, а не его предел при $t \to \infty$, как это сделано в этой работе.

2. Постановки задач

Перейдем к формулировкам двух близких друг к другу постановок задач оптимальной фильтрации с критерием оптимальности

$$(3) \qquad J = \lim_{t\to\infty} E[e(t)^T e(t)],$$

где $e(t) \triangleq z(t) - \widetilde{z}(t)$ — ошибка оценивания вектор-функционала.

1. Для системы (1) требуется на основе наблюдения выхода $y(t)$ и по известному управлению $u(t)$ на интервале $[0, t]$ определить несмещенную $(E[e(t)] \equiv 0)$ оценку $\widetilde{z}(t)$ вектор-функционала (2), обеспечивающую минимум установившегося среднего квадрата ошибки (3) при любом $\bar{x}_0$.

2. Для системы (1) требуется на основе наблюдения выхода $y(t)$ при $u(t) = -\widetilde{z}(t)$ на интервале $[0, t]$ определить условия существования несмещенной оценки $\widetilde{z}(t)$ вектор-функционала (2), обеспечивающей минимум установившегося среднего квадрата ошибки (3) и стабилизирующей систему (1) при любом $\bar{x}_0$.

В первом пункте приведена классическая задача оптимальной фильтрации, ее решение с помощью фильтра порядка r известно и приведено в работе [3]. Задача второго пункта состоит в использовании оптимального фильтра для цели стабилизации линейной системы.

3. Несмещенность функционального фильтра

Оптимальный фильтр должен находиться в классе линейных систем. В этой работе, так же как в работе [3], рассматривается только класс фильтров вида

$$\dot{\widetilde{z}} = N\widetilde{z} + My + FBu, \quad \widetilde{z}(0) = F\bar{x}_0, \tag{4}$$

где y, u и $\widetilde{z}$ имеют тот же смысл, что и в системе (1), (3), а N и M — матрицы соответствующих размеров. При таком представлении фильтра задача сводится к определению матриц N, M и F.

Используя правило дифференцирования Ито [1, с. 85] стохастического сигнала $e(t)$, нетрудно получить, что ошибка оценивания описывается уравнением

$$\dot{e}(t) = (FA - MC - NF)x(t) + Ne(t) + Fw(t) - Mv(t). \tag{5}$$

Уравнение (5) вместе с системой (1) и законом управления $u = -\widetilde{z}$ описывают закон изменения ошибки оценивания и определяют динамику замкнутой системы, т.е. закон изменение вектора x. Вместе данные уравнения могут быть записаны в виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix} = \bar{A}\begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ F & -M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} A - BF & B \\ FA - MC - NF & N \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где I_n — единичная матрица порядка n.

Определим математическое ожидание ошибки $e(t)$, используя формулу Коши для первого уравнения системы (1) и для уравнения (5), меняя местами порядок выполнения операций интегрирования и математического ожидания [1, с. 70] и учитывая, что $E[w(t)] = 0$, $E[v(t)] = 0$ и $E[x_0] = \bar{x}_0$:

$$E[e(t)] = \int_0^t e^{N(t-\tau)}(FA - MC - NF)\left\{e^{A\tau}\bar{x}_0 + \int_0^\tau e^{A(\tau-\theta)}BE[u(\theta)]d\theta\right\}d\tau. \tag{7}$$

Используя выражение (7), легко доказать следующее известное утверждение.

Теорема 1. *В классической задаче фильтрации для того, чтобы функциональный наблюдатель вида (4) давал несмещенную оценку $\widetilde{z}$, необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$FA - MC - NF = 0. \tag{8}$$

В данном докладе авторы предлагают условие несмещенности для совместной задачи стабилизации и оптимальной фильтрации (задача 2) и ее частного случая, когда среднее значение начальной величины равно нулю, т. е. $\bar{x}_0 = 0$.

Теорема 2. I. *В совместной задаче стабилизации и оптимальной фильтрации (задача 2), если* $\bar{x}_0 \neq 0$, *но пара* $(A_F, \bar{x}_0)$ *— управляема, то условие* (8) *также является необходимым и достаточным условием несмещенности фильтра* (4). *При этом в случае, когда пара* $(A_F, \bar{x}_0)$ *не управляема, для несмещенности фильтра необходимо и достаточно выполнения условия*

$$(FA - MC - NF)K_{A_F, \bar{x}_0} = 0, \tag{9}$$

где $A_F = A - BF$, $K_{A_F,\, \bar{x}_0}$ *— матрица управляемости Калмана для пары* $(A_F,\ \bar{x}_0)$.
II. *В совместной задаче стабилизации и оптимальной фильтрации, если* $\bar{x}_0 = 0$, *то любой фильтр вида* (4) *дает несмещенную оценку.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы может быть получено после анализа и преобразований выражения (7) при $u(t) = -\widetilde{z}(t)$. После применения преобразования Лапласа к обеим частям равенства (7) при $u(t) = e - z$ получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{E[e(t)]\} =& (I_r - (sI_r - N)^{-1}(FA - MC - NF)(sI_n - A_F)^{-1}B)^{-1} \times \\ & \times (sI_r - N)^{-1}(FA - MC - NF)(sI_n - A_F)^{-1}\bar{x}_0 \equiv 0. \end{aligned} \tag{10}$$

После преобразования выражения (10) и разложения в степенной ряд обратной матрицы $(sI_n - A_F)^{-1}$ будем иметь равенства

$$(FA - MC - NF)A_F^i \bar{x}_0 = 0, \quad i = 0, 1, \ldots. \tag{11}$$

Из теоремы Гамильтона–Кэли для матрицы A_F следует, что из первых n равенств (11) следуют остальные, а сами равенства (11) можно записать в матричном виде (9). Поэтому из управляемости пары $(A_F,\ \bar{x}_0)$ следует необходимость и достаточность условия (8). Второе утверждение теоремы очевидным образом следует из выражения (10) при $\bar{x}_0 = 0$. Теорема 2 доказана.

Смысл утверждения теоремы 2 состоит в том, что при построении оценки вектор–функционала замкнутой системы, возможно получение несмещенных оценок в случае, когда равенство (8) не выполнено. С теоретической точки зрения это расширяет пространство параметров функционального наблюдателя и, следовательно, дает возможность уменьшить значение критерия оптимальности (3). С практической точки зрения несмещенные фильтры для замкнутой системы могут играть роль регулятора.

4. Метод сведения задачи фильтрации к задаче оптимизации

Пусть $S_e(\omega)$ — спектральная плотность ошибки наблюдения $e(t)$, тогда [5, с. 19]

$$J = \lim_{t \to \infty} E[e(t)^T e(t)] = \frac{1}{2\pi} tr \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_e(\omega) d\omega \right]. \tag{12}$$

Так как шумы $w(t)$ и $v(t)$ не коррелированны между собой и передаточные функции W_{ew} (от шума w к ошибке e) и W_{ev} (от шума v к ошибке e) замкнутой системы (6) устойчивы, то [5, с. 21]

$$S_e(\omega) = W_{ew}(j\omega) Q {W_{ew}}^T(-j\omega) + W_{ev}(j\omega) R {W_{ev}}^T(-j\omega). \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), получаем

$$J = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} tr\left[W_{ew}(j\omega)Q{W_{ew}}^T(-j\omega)\right]d\omega + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} tr\left[W_{ev}(j\omega)R{W_{ev}}^T(-j\omega)\right]d\omega. \quad (14)$$

Вычисление J по формуле (14) можно свести [6, с. 705,706] к вычислению интегралов вида

$$\bar{J}_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{b_0(j\omega)^{n-1}+b_1(j\omega)^{n-2}+\ldots+b_{n-1}}{a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+\ldots+a_n}\right|^2 d\omega. \quad (15)$$

Для расчета интегралов (15) существуют специальные формулы [6, с. 707]. Из вида выражений интегралов (15) ясно, что критерий оптимальности (3) в задаче оптимизации является рациональной функцией, т. е. отношением двух полиномов от многих переменных (элементов матриц N, M и F).

Требуя устойчивость замкнутой системы (6) и несмещенность фильтра (4), можно сформулировать утверждение о совместной задаче стабилизации и фильтрации.

Теорема 3. *Фильтр (4) и матрица обратной связи (2), являющиеся решением совместной задачи стабилизации и фильтрации для системы (1), существуют тогда и только тогда, когда существует решение задачи оптимизации*

$$\min_{N,M,F,P_{\bar{A}}:\begin{cases}(MC-NF)K_{A_F,x_0}=FAK_{A_F,x_0},\\ P_{\bar{A}}\bar{A}+\bar{A}^TP_{\bar{A}}\prec 0,\\ P_{\bar{A}}\succ 0\end{cases}} \bar{J}_n(N,M,F),$$

где $\bar{A}$ — матрица замкнутой системы (6), $\bar{J}_n$ определяется в соответствии с (14) и (15) с учетом того, что передаточные функции $W_{ew}(s)$ и $W_{ev}(s)$ вычисляются для замкнутой системы (6).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-07-00540, 18-07-00375).

Список литературы

1. Острем К.Ю. Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир, 1973. 324 с.
2. Коровин С.К., Фомичев В.В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 224 с.
3. Darouach M. On the optimal unbiased functional filtering // IEEE Transactions on Automatic Control. 2000. Vol. 45, No. 7. P. 1374-1379.
4. Nagpal K.M., Helmick R.E., Sims C.S. Reduced-order estimation. Part 1. Filtering // Intern. J. Control. 1987. Vol. 45, No. 6. P. 1867-1888.
5. Saberi A., Stoorvogel A.A., Sannuti P. Filtering Theory. With Applications to Fault Detection, Isolation, and Estimation. Basel: Birkhauser, 2007. 723 p.
6. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Книга 1. Математическое описание, анализ устойчивости и качества систем автоматического регулирования / Под ред. В.В. Солодовникова. М.: Машиностроение, 1967. 770 с.