УДК 519.711.3

СИНТЕЗ СТОХАСТИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИСКРЕТНОГО ОБЪЕКТА

С.И. Колесникова
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
Россия, 190000, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 67
E-mail: skolesnikova@yandex.ru

Ключевые слова: плохо формализуемый нелинейный дискретный объект, стохастический регулятор на многообразиях.

Аннотация: Представлена система управления стохастическим дискретным объектом, сконструированная на основе метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов. Объект управления представлен в виде системы нелинейных разностных уравнений, правые части которых могут содержать неопределенности стохастической природы. Полученные законы управления обеспечивают стабилизацию системы в окрестности заданного целевого множества. Обсуждаемые результаты могут быть полезны при создании системы поддержки принятия решений в задачах различной прикладной направленности. Дан пример применения полученных результатов в двух прикладных задачах.

1. Введение

Сложность задач синтеза управления объектами с нелинейным описанием хорошо известна [1-5], поскольку «уравнения, по виду очень близкие, ведут себя совершенно противоположным образом» (по Ж. Адамару).

Целью настоящей работы является рассмотрение свойств нового алгоритма конструирования стохастического регулятора на основе совмещения методов аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) [5] и синтеза робастных регуляторов [6] для объекта, модель описания которого есть система разностных уравнений с ограниченным шумом в правой части произвольной природы.

Напомним, что относительно детерминированного объекта скалярного управления в методе АКАР [5] выполнены условия: а) аналитически описано целевое множество со свойством инвариантности $\psi\left(x_1(t), x_2(t)\right)=0,\ t\to\infty$; б) существует асимптотически устойчивая целевая система, удовлетворяющая требованиям $\psi\left(x_1(t), x_2(t)\right)=0$, $J=\sum_{t=0}^{\infty}\left(\alpha^2\psi^2(t)+\left(\Delta\psi(t)\right)^2\right)\to\min$.

2. Синтез стохастического регулятора на многообразии

2.1. Постановка задачи

Пусть объект задан системой нелинейных стохастических разностных уравнений [10]:

(1)
$$X_1[k+1] = F_1[k] + \xi_1[k+1] + c_1\xi_1[k],$$
$$X_2[k+1] = F_2[k] + u[k] + \xi_2[k+1] + c_2\xi_2[k],$$

где $F_i[k] := F_i(X_1[k], X_2[k], \theta)$, $i = 1,2$ - нелинейные ограниченные функции с вектором параметров θ; вектор $X[t_k] := X[k] = (X_1[k], X_2[k]), t_k = k\Delta, k \in \{0,1,...\}, \Delta > 0$ измеряется без помех (то есть измеряемый в моменты $t_k, k \in \{0,1,...\}$ вектор обратной связи $Y[k] = X[k], k \in \{0,1,...\}$); $u[k]$ - искомое управление на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$; управление производится на промежутке $[t_0, \infty)$; $\{\xi_i[k]\}_{k\ge 0}$, $i = 1,2$ – последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин со средним 0 и дисперсиями σ_i^2, $i = 1,2$, соответственно; коэффициенты $0 < c_i < 1$, $i = 1,2$ характеризуют скорость «забывания» шумов.

Ставится задача синтеза робастного управления, выводящего объект (1) в целевое множество состояний $\mathbf{E}\{\psi[k]\} = 0, \psi[k] = \psi(X_1[k], X_2[k]) = 0, k \in \{0,1,...\}$, где $\psi(\cdot)$ - известная функция, при этом требуется, чтобы $\mathbf{E}\{\psi[k+1] + \lambda\psi[k]\} = 0$, а дисперсии $\mathbf{D}\{\psi[k+1] + \lambda\psi[k]\}$, $\mathbf{D}\{X_2[k+1]\}$ случайных величин $\psi[k+1] + \lambda\psi[k]$ и выходной макропеременной $\psi(X_1[k], X_2[k])$ были равны наименьшим значениям из возможных $\forall k \ge 0$ при заданных начальных условиях $(X_1[0], X_2[0])$ [7].

Для наглядности и лучшей интерпретируемости логики алгоритма синтеза робастного регулятора рассмотрим две цели управления:

(2) $$\psi[k] = X_2[k] - X_2^*[k] = 0,\ k \to \infty;$$

(3) $$\psi[k] = X_1[k] - \rho X_2[k] = 0,\ k \to \infty,\ \rho \ne 0.$$

Назовем, соответственно, *задачей управления 1* совокупности описаний (1) и (2); *задачей управления 2* - описания (1) и (3). Здесь $X_2^*[k]$ - целевая траектория.

2.2. Алгоритм синтеза стохастической системы управления

2.2.1. Решение задачи управления 1. Согласно базовому методу АКАР управления при известных шумах $\tilde{u}[k]$ имеют вид:

(4) $$\tilde{u}[k] = -F_2[k] - \xi_2[k+1] - c_2\xi_2[k] + X_2^*[k+1] - \lambda\psi[k],\ |\lambda| < 1,\ k \ge 0.$$

В условиях независимых шумов $\{\xi_i[k]\}_{k\ge 0}$, $i = 1,2$ величина управления $u[k]$ будет определяться некоторой функцией *U* от совокупности величин $\{X_1[i],\ X_2[i],\ u[i]\}_{i=\overline{0,k-1}}$:

$$u[k] = U(X[i], X[i-1], ..., X[0], ..; u[k-1], u[k-2], ..., u[0]),\ k \ge 1,$$
$$X[i] = (X_1[i],\ X_2[i]),\ i = \overline{0,k-1}.$$

Обозначим $\xi^k := \xi[k], \xi[k-1] ... \xi[1]$ и будем искать управление для объекта управления (1), (2) в виде условного математического ожидания:

(5) $$u[k] = \mathbf{E}\left\{\tilde{u}[k] \,\middle|\, \xi^k\right\} = -F_2[k] - c_2\xi_2[k] + X_2^*[k+1] - \lambda\psi[k], \ |\lambda| < 1, \ k \geq 0 .$$

В условиях закона управления (5) имеем (ниже следуемые равенства будем понимать в смысле $\mathbf{P}$-п.н.):

$$X_2[k+1] = F_2[k] + u[k] + \xi_2[k+1] + c_2\xi_2[k] = \xi_2[k+1] + X_2^*[k+1] - \lambda\psi[k], \forall k \geq 0 .$$

Учитывая вид макропеременной (2) $\psi[k+1] + \lambda\psi[k] = \xi_2[k+1], \ \forall k \geq 0$ окончательно получаем итоговое описание регулятора для задачи 1:

(6) $$u[k] = -F_2[k] - (c+\lambda)\psi[k] - c\lambda\psi[k-1] + X_2^*[k+1], \ |\lambda| < 1, \ k \geq 0.$$

Утверждение 1. Дисперсии случайных величин $\psi[k+1] + \lambda\psi[k]$ и выходной переменной $X_2[k]$ под воздействием управления (6) равны наименьшим из возможных значений $\forall k \geq 0$:

(7) $$\mathbf{D}\{\psi[k+1] + \lambda\psi[k]\} = \sigma_2^2, \ \mathbf{D}\{X_2[k+1]\} = \sigma_2^2.$$

Доказательство (7) осуществляется непосредственной проверкой с учетом свойств математического ожидания и дисперсии случайных величин.

Итоговая система управления в пространстве состояний объекта (2.1) имеет вид совокупности уравнений (1), (2), (8):

(8) $$\begin{aligned} &u[k] = -F_2[k] - (c_2+\lambda)\psi[k] - c_2\lambda\psi[k-1] + X_2^*[k+1], \\ &\psi[k] = X_2[k] - X_2^*[k], \ |\lambda| < 1, \ k \geq 0. \end{aligned}$$

2.2.2. Решение задачи управления 2. Согласно базовому методу АКАР управления при известных шумах $\tilde{u}[k]$ имеют вид:

$$\tilde{u}[k] = -F_2[k] - \xi_2[k+1] - c_2\xi_2[k] + \rho^{-1}\left(F_1[k] + \xi_1[k+1] + c_1\xi_1[k] + \lambda\psi[k]\right).$$

Аналогично рассуждениям при конструировании управления (5) получаем:

(9) $$u[k] = \mathbf{E}\left\{\tilde{u}[k] \,\middle|\, \xi^k\right\} = \rho^{-1}F_1[k] - F_2[k] + \rho^{-1}\lambda\psi[k] - c_2\xi_2[k] + \rho^{-1}c_1\xi_1[k].$$

Рассмотрим поведение целевой переменной и выражения $\psi[k+1] + \lambda\psi[k]$ при управлении вида (9). С учетом вида макропеременной (3) получаем:

(10) $$\begin{aligned} &\psi[k+1] + \lambda\psi[k] = \xi_1[k+1] - \rho\xi_2[k+1], \\ &X_2[k+1] = \rho^{-1}F_1[k] + \rho^{-1}\lambda\psi[k] + \rho^{-1}c_1\xi_1[k] + \xi_2[k+1]. \end{aligned}$$

Система (1) под управлением (9) примет вид:

(11) $$\begin{aligned} &X_1[k+1] = F_1[k] + \xi_1[k+1] + c_1\xi_1[k], \\ &X_2[k+1] = \rho^{-1}F_1[k] + \rho^{-1}\lambda\psi[k] + \rho^{-1}c_1\xi_1[k] + \xi_2[k+1]. \end{aligned}$$

Умножим второе уравнение (11) на $-\rho$ и сложим с первым, получим соотношение:

(12) $$X_1[k+1] - \rho X_2[k+1] = -\lambda\psi[k] + \xi_1[k+1] - \rho\xi_2[k+1].$$

Из (12) с учетом первого уравнения (10) следует, что цель управления достигнута. Для получения итогового вида регулятора исключим выражение $-c_2\xi_2[k] + \rho^{-1}c_1\xi_1[k]$ в (9) с учетом последних соотношений. Положив (для упрощения) $c_1 = c_2 = c$ с учетом (9), (10) получим:

(13) $$u[k] = \rho^{-1}F_1[k] - F_2[k] + \left(\rho^{-1}\lambda + c\rho\right)\psi[k] + c\rho\lambda\psi[k-1].$$

Итоговая система управления в пространстве состояний объекта (1) для задачи 2 имеет вид совокупности уравнений (1), (3), (13).

Утверждение 2. Дисперсии случайных величин $\psi[k+1]+\lambda\psi[k]$ и выходной величины $\psi[k]=X_1[k]-\rho X_2[k]$ под управлением (13) равны наименьшим из возможных значений $\forall k \geq 0$ и подчиняются соотношениям:

$$\mathbf{D}\{\psi[k+1]+\lambda\psi[k]\}=\sigma_1^2+\rho^2\sigma_2^2,$$
$$\mathbf{D}\{\psi[k+1]\}=\sigma_1^2+\rho^2\sigma_2^2+\lambda^2\mathbf{D}\{\psi[k]\},\ |\lambda|<1, k\geq 0. \tag{14}$$

Доказательство (14) осуществляется непосредственной проверкой.

3. Примеры работы алгоритма стохастического управления

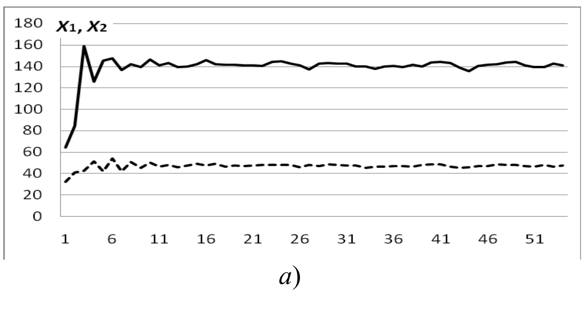
3.1. Экономический объект

Рассмотрим задачу управления экономической моделью рынка двух производителей $X_1[k],\ X_2[k], k=0,1,2,...$ однотипной продукции, ранее исследованной на устойчивость В. И. Шаповаловым (например, в [5] (стр. 447) в условиях отсутствия шумов и внешнего воздействия:

$$X_1[k+1]=X_1[k]\big(\alpha C_0-\mu\beta_1 X_1[k]X_2[k]\big)+\xi_1[k+1]+c_1\xi_1[k],$$
$$X_2[k+1]=A[k]\big(\alpha C_0-\mu\beta_2 X_1[k]X_2[k]\big)+u[k]+\xi_2[k+1]+c_2\xi_2[k]. \tag{15}$$

Здесь $X_1[k],\ X_2[k]$ - величины, пропорциональные объемам продукции, поставляемые на рынок со стороны субъектов $X_1,\ X_2$, соответственно; α, C_0, μ - параметры модели; величины β_1,β_2 означают цены, устанавливаемые производителями $X_1,\ X_2$, соответственно. Модель Фейгенбаума, являющаяся базовой в описании (15), обеспечивает наличие хаотических режимов среди предельных состояний объекта.

Решение задачи управления 2 с учетом вида (15) иллюстрируется на рис. 1, из которых следует, что в условиях помех стохастический регулятор имеет явное предпочтение перед детерминированным регулятором в нерасчетных условиях.



a)

b)

Рис. 1. Траектории *a*) переменных: сплошное начертание для стохастического управления $u[k]$, пунктир для детерминированного АКАР-управления $u(A)[k]$; *b*) макропеременных $\psi[k],\psi(A)[k]$, сплошное начертание и пунктир, соответственно; $\xi[k] \sim N(0;2,5)$; $A=10,\ C_0=3000,\ X_0=4,\ Y_0=17, A=10,\ C_0=3000,\ X_0=4,\ Y_0=17,$ $\alpha=56\cdot10^{-5},\ \beta_1=7,3,\ \beta_2=7,5,\ \mu=2\cdot10^{-4},\ \rho=0,61$

3.2. Технический объект

Пусть объект (дискретный вариант робота-манипулятора) имеет описание:

$$x_1[k+1] = x_1[k] + \tau x_2[k],$$
$$x_2[k+1] = x_2[k] + \tau a q(x_1[k], x_2[k]) + \tau a u[k] + \xi[k+1] + c\xi[k],\ k \in \{0,1,...\}, \quad (16)$$

где $x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})^T$, $x_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23})^T$ - переменные состояния, $x_1(t) = b(t),\ x_2(t) = \dot{b}(t)$, $a = m^{-1}$, $m = \|m_{ij}\|_{3\times 3}$, q - известные параметры модели; $u \in R^3$ - искомое управление в задаче стабилизации: требуется вывести траектории объекта $b_i(t)$ на заданные $b_i^*(t),\ i = 1,2,3$; $\{\xi[k]\}_{k\geq 0}$ - случайные величины при фиксированном k, $c = const$; τ - коэффициент пропорциональности.

Итоговая система управления для достижения цели управления $b_i[k] - b_i^*[k] = 0,\ i = 1,2,3,\ k \to \infty$ объектом (16), имеет вид совокупности уравнений (16), (17):

$$\tau a u[k] = -F_2[k] - (c + \omega_1) x_2[k] - c\omega_1 x_2[k-1] + E[k] + cE[k-1],$$
$$E[k] = -\tau^{-1}\left[(1+\omega_2)(x_1[k] + \tau x_2[k]) + b^*[k+2] + \omega_2 b^*[k+1]\right] + \omega_1 \varphi(X_1[k]), \quad (17)$$

где ω_1, ω_2 - параметры регулятора, физически прозрачно интерпретируемые [5].

Утверждение 3. Управление (17) для задачи (16) обеспечивает асимптотически устойчивое в среднем поведение объекта (16) в окрестности многообразия $\psi(x_1[k]) = x_1[k] - b^*[k] = 0$ и обладает свойствами: 1) $\mathbf{E}\{\psi[k+1] + \omega\psi[k]\} = 0$; 2) дисперсии случайных величин $\psi[k]$ и выходной величины $X_1[k]$ под воздействием управления (17) равны наименьшим из возможных значений.

4. Заключение

Основой построения обсуждаемого в докладе стохастического алгоритма управления явился подход, реализованный методом аналитического конструирования агрегированных регуляторов, ранее успешно примененного для конструирования управления в технических объектах [5] и распространенный автором АКАР на системы с неполным описанием, но в детерминированных условиях.

Результаты работы могут быть актуальны в системах поддержки принятия решений (СППР) для управления плохо формализуемыми многомерными, многосвязными, нелинейными объектами, основными функциями которой могут быть формирование рекомендаций по вопросам реализации оптимальной стратегии обеспечения заданного баланса между переменными объекта или стабилизации переменных в окрестности заданного множества состояний.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-08-00920 А).

Список литературы

1. Халил Х.К. Нелинейные системы: монография. М.: Институт компьютерных исследований; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 812 с.
2. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000. 562 с.

3. Тюкин И.Ю., Терехов В.А. Адаптация в нелинейных динамических системах. СПб.: ЛКИ, 2008. 384 с.
4. Freeman R.A., Kokotovic P.V. Robust nonlinear control design. Boston: Birkhäuser, 1996. 258 p.
5. Колесников А.А. Синергетика и проблемы теории управления: сборник научных трудов / Под ред. А.А. Колесникова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 504 с.
6. Åström K.J., Wittenmark B. Adaptive control. New York: Dover Publications, 2008. 590 p.
7. Kolesnikova S.I. A multiple-control system for nonlinear discrete object under uncertainty // Optimization Methods and Software. 2018. DOI 10.1080/10556788.2018.1472258.