УДК 62.50

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ С ИТЕРАТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ В УСЛОВИЯХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

П.В. Пакшин

Арзамасский политехнический институт (филиал) Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева

Россия, 607227, Арзамас, ул. Калинина, д. 19

E-mail: pakshinpv@gmail.com

Ю.П. Емельянова

Арзамасский политехнический институт (филиал) Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева

Россия, 607227, Арзамас, ул. Калинина, д. 19

E-mail: emelianovajulia@gmail.com

Ключевые слова: управление с итеративным обучением, случайные возмущения, стохастическое управление, повторяющиеся процессы, 2D-модели, векторные функции Ляпунова, дивергентный метод, стохастическая стабилизация, стохастическая диссипативность.

Аннотация: В статье предлагается новый метод синтеза управления с итеративным обучением для линейной системы в условиях случайных возмущений, действующих на объект и шумов измерений. Метод основан на разработанной авторами теории диссипативности нелинейных 2D-систем в форме повторяющихся процессов. В общем случае эта теория позволяет синтезировать нелинейные законы управления. В данной работе рассматривается частный случай синтеза кусочно-линейного управления, в котором переключение происходит в зависимости от ошибки обучения. Такая особенность позволяет существенно повысить скорость сходимости процесса обучения, что подтверждается сравнением с другим известным законом управления.

1. Введение

Управление с итеративным обучением играет важную роль в повышении точности систем, функционирующих в повторяющемся режиме, в частности в разработке высокоточных роботов-манипуляторов. В связи с высокой эффективностью и относительно простой формой такого управления оно привлекает широкий интерес как теоретиков, так и практиков [1, 2]. Начиная с конца восьмидесятых годов прошлого века на крупнейших международных конференциях регулярно организуются сессии, посвященные проблемам управления с итеративным обучением.

Реальные системы находятся под действием случайных возмущений, кроме того всегда присутствуют как систематические так и случайные погрешности измерений.

Эти факторы снижают точность управления, к тому же следует учесть, что одним из условий эффективности итеративного обучения является то, что для каждого повторения процесса начальные условия должны быть одинаковыми. Таким образом, учет упомянутых случайных факторов играет существенную роль и задача синтеза стохастического управления с итеративным обучением имеет важное теоретическое и прикладное значение. Обзор результатов по стохастическому управлению с итеративным обучением представлен в статьях [3, 4]. Несмотря на отмеченную важность проблемы, решению задачи стохастического управления с итеративным обучением в классической постановке посвящено небольшое число работ. В обзоре [3] 2014 года процитировано 104 работы, из которых 17 относятся к классическому направлению, 9 работ связано с исследованием управления с итеративным обучением в условиях случайной потери информационных пакетов в канале связи между измеряемым выходом и входом, остальные цитируемые работы не содержат стохастических постановок и носят вводный характер. В обзоре [4] 2018 года дополнительно процитировано 25 новых публикаций, из которых стохастические задачи рассматриваются в 19 работах, где, в основном, исследуются уже упомянутые задачи в условиях потери информационных пакетов (random packet losses, data dropouts).

Анализ упомянутых публикаций из обзора и других, не вошедших в эти обзоры, показывает, что конструктивные методы синтеза стохастического управления с итеративным обучением в рамках классической постановки предложены в [5–9] для линейных систем с дискретным временем, другие работы учитывают только дополнительные к классической постановке случайные факторы, что никак не заменяет и не исключает развитие классического направления. Полученные в этих работах алгоритмы обеспечивают невысокую скорость сходимости процессов обучения, которая, кроме того, зависит от начальных условий. Предлагаемый в данной статье новый подход к решению задачи позволяет получить алгоритмы, в которых эти недостатки устранены.

2. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную систему, которая функционирует в повторяющемся режиме с постоянным периодом повторения, возвращаясь после каждого повторения в фиксированное начальное состояние. На каждом повторении система описывается уравнениями

$$
\begin{aligned}
&x_k(p+1) = Ax_k(p) + Bu_k(p) + D\mu_k(p),\ y_k(p) = Cx_k(p),\\
&y_{\omega k}(p) = y_k(p) + G\omega_k(p),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где k – номер повторения и на каждом повторении $x_k(p) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – вектор состояния, $y_k(p) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектор выходных переменных, $y_{\omega k}(p) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектор измерений, $u_k(p) \in \mathbb{R}^{n_u}$ – вектор управления, $\mu_k(p) \in \mathbb{R}^{n_\mu}$ – вектор шумов, действующих на объект, $\omega_k(p) \in \mathbb{R}^{n_\omega}$ – вектор шумов измерений. Предполагается, что $\mu_k(p)$ и $\omega_k(p)$ представляют собой независимые гауссовские белые шумы с нулевыми средними и ковариационными матрицами $\mathrm{E}[\mu_k(p)\mu_k^T(p)] = S_\mu$, $\mathrm{E}[\omega_k(p)\omega_k^T(p)] = S_\omega$, где E – оператор математического ожидания и $\mu_k(p)$ не зависит от начального состояния.

Задача состоит в нахождении такой последовательности управлений $\{u_k(p)\}$, которая с увеличением числа повторений k последовательно улучшала бы точность воспроизведения заданной траектории. Сформулируем это в точных терминах. Пусть

$y_{ref}(p)$ – желаемая траектория движения на интервале $0 \leqslant p \leqslant N-1$ и $e_k(p) = y_{ref}(p) - y_k(p)$ – ошибка воспроизведения этой траектории на k-м повторении. Условие последовательного повышения точности можно выразить следующими соотношениями:

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}||e_k(p)|| = 0, \ \lim_{k\to\infty} \mathrm{E}||u_k(p) - u_\infty(p)|| = 0, \tag{2}$$

при условии, что $\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}||e_k(p)||^2$ and $\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}||u_k(p) - u_\infty(p)||^2$ остаются ограниченными. В литературе $u_\infty(p)$ называется обученным управлениемю Процесс обучения будем строить по следующему алгоритму

$$u_{k+1}(p) = u_k(p) + \Delta u_{k+1}(p), \tag{3}$$

где $\Delta u_{k+1}(p)$ корректирующая поправка управления, которую будем выбирать из условия (2) и ограниченности $\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}||e_k(p)||^2$ и $\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}||u_k(p) - u_\infty(p)||^2$. Если эти условия выполнены, будем говорить, что процесс итеративного обучения, определяемый алгоритмом (3) сходится.

3. Основной результат

На каждом повторении на основе вектора измерений будем строить оптимальную в среднем квадратическом оценку $\hat{x}_k(p)$ вектора состояния $x_k(p)$ на основе фильтра Калмана.

$$\hat{x}_k(p+1) = A\hat{x}_k(p) + Bu_k(p) + F[y_{\omega k}(p) - C\hat{x}_k(p)]$$

где $\hat{y}_k(p) = C\hat{x}_k(p)$ $F = ASC^T[CSC^T + S_\omega]^{-1}$, и S является решением алгебраического уравнения Риккати.

$$S = ASA^T - ASC^T[CSC^T + S_\omega]^{-1}CSA^T + S_\mu.$$

Введем в рассмотрение приращение оценки состояния

$$\hat{\eta}_{k+1}(p+1) \ = \ \hat{x}_{k+1}(p) - \hat{x}_k(p),$$

Нетрудно показать, что условия сходимости процесса итеративного обучения будут выполнены, если 2D-система в форме повторяющегося процесса

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{k+1}(p+1) &= A\hat{\eta}_{k+1}(p) + B_{k+1}(p)v_{k+1}(p) + FG\delta_{k+1}(p), \\ e_{k+1}(p) &= -CA\hat{\eta}_{k+1}(p) + e_k(p) - CBv_{k+1}(p) - CD\varsigma_{k+1}(p). \end{aligned} \tag{4}$$

где $v_{k+1}(p) = \Delta u_{k+1}(p-1)$, $\delta_{k+1}(p) = \Delta\omega_{k+1}(p-1)$, $\varsigma_{k+1}(p) = \Delta\mu_{k+1}(p-1)$, будет устойчива по второму моменту относительно профиля повторения, т.е.

$$\lim_{k,p\to\infty} \mathrm{E}[||\hat{\eta}_k(p)||^2 + ||e_k(p)||^2] \leqslant \Gamma < \infty, \tag{5}$$

где Γ не зависит N. Для нахождения корректирующей поправки $v_{k+1}(p)$, обеспечивающей стабилизацию (4) в смысле (5) воспользуемся развитием предложенного в [10] дивергентного метода векторных функций Ляпунова и связанным с ним понятием диссипативности повторяющихся процессов.

Обозначим $\bar{\eta}_{k+1}(p) = [\hat{\eta}_{k+1}^T(p)\ e_k^T(p)]^T$, $\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -CA & I \end{bmatrix}$, $\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ -CB \end{bmatrix}$. Определим блочно-диагональную матрицу $P = \mathrm{diag}[P_1\ P_2] \succ 0$ как решение неравенства Риккати

$$\bar{A}^T P\bar{A} - (1-\sigma)P - \bar{A}^T P\bar{B}[\bar{B}^T P\bar{B} + R]^{-1}\bar{B}^T P\bar{A} + Q \preceq 0,$$

где $0 < \sigma < 1$ – положительный скалярный параметр, $Q \succ 0$ и $R \succ 0$ – весовые матрицы. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Множество стабилизирующих управлений $v_{k+1}(p)$ обеспечивающих устойчивость (4) по второму моменту относительно профиля повторения определяется соотношением*

$$v_{k+1}(p) = -[\bar{B}^T P\bar{B} + R]^{-1}\bar{B}^T P\bar{A}\Theta(\bar{\eta}_{k+1}(p))\bar{\eta}_{k+1}(p),$$

где $\Theta(\bar{\eta})$ – симметричная матрица, удовлетворяющая неравенству

$$M - 2M\Theta(\bar{\eta}) + \Theta(\bar{\eta})M\Theta(\bar{\eta}) - Q \prec 0, \tag{6}$$

для всех $\bar{\eta} \in \mathbb{R}^{n_x+n_y}$, where $M = \bar{A}^T P\bar{B}[\bar{B}^T P\bar{B} + R]^{-1}\bar{B}^T P\bar{A}$.

4. Пример

Рассмотрим портальный робот, описанный в [11] который перемещает одинаковые грузы по заданной траектории. Его динамику по вертикальной оси при учете шумов описывается уравнениями

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + B_0[u(t) + \nu(t)],\ y_\rho(t) = Cx(t) + \rho(t),$$

где $\nu(t)$ и $\rho(t)$ – независимые непрерывные гауссовские белые шумы с интенсивностями Q_n и R_n. При заданном периоде дискретности T_s, используя стандартную технику, перейдем от этой модели к (1) В соответствии с теоремой 1 множество законов управления, обеспечивающих сходимость процесса обучения задается соотношением

$$u_k(p) = u_{k-1}(p) + K\Theta[(\hat{x}_k(p) - \hat{x}_{k-1}(p))^T\ (y_{ref}(p+1) - C\hat{x}_{k-1}(p+1))^T]^T, \tag{7}$$

где $\hat{x}_k(p)$ – оценка, формируемая фильтром Калмана, $K = -[\bar{B}^T P\bar{B} + R]^{-1}\bar{B}^T P\bar{A}$, $\Theta = \Theta((\hat{x}_k(p) - \hat{x}_{k-1}(p)),\ \hat{e}_{k-1}(p+1)), \hat{e}_k(p) = y_{ref}(p) - C\hat{x}_k(p)$ – матричная функция, определенная в теореме 1. Наиболее просто выбрать функцию Θ кусочно-постоянной. Определим выборочную среднеквадратическую ошибку как

$$E(k) = \left[\frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N} ||\hat{e}_k(p)||^2\right]^{1/2}$$

и зададим функцию Θ в виде

$$\Theta = \mathrm{diag}[I\ \Theta_2(E(k))],\ \Theta_2(E(k)) = \begin{cases} 10, & \text{если } E(k) > 2.5\cdot 10^{-3}, \\ 1, & \text{если } E(k) \leqslant 2.5\cdot 10^{-3}\ , \end{cases} \tag{8}$$

так, чтобы выполнялось условие (6) из теоремы 1. Такой выбор обеспечивает настройку коэффициента усиления в зависимости от величины ошибки.

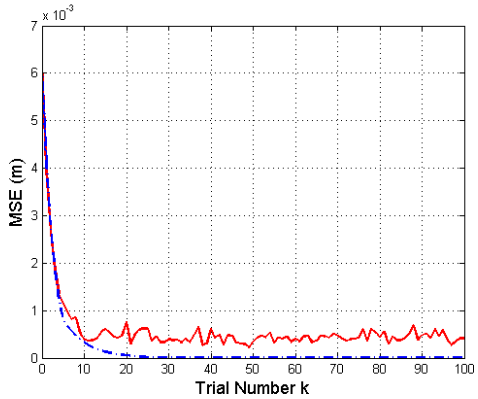

Рис. 1. Изменение $E(k)$ при использовании алгоритма (7) – (8) (пунктирная линия соответствует случаю отсутствия шумов)

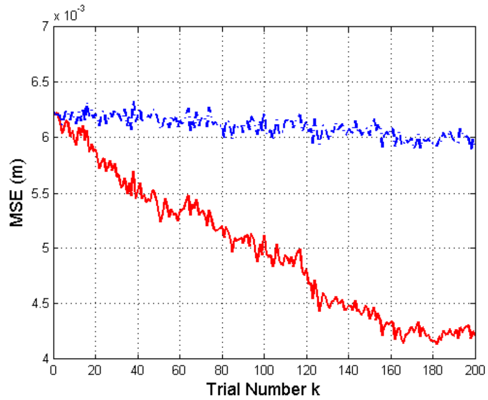

Рис. 2. Изменение $E(k)$ при использовании алгоритма из [6] при различных начальных условиях

Моделирование подтвердило существенное улучшение скорости сходимости процесса обучения по сравнению с алгоритмом из [6], что демонстрируют рисунки 1, 2. Теорема 1 получена при поддержке РНФ (грант № 18-79-00088).

Список литературы

1. Ahn H.-S., Moore K.L., Chen Y.Q. Iterative Learning Control: Robustness and Monotonic Convergence for Interval Systems. London: Springer, 2007.
2. Bristow D.A., Tharayil M., Alleyne A.G. A Survey of Iterative Learning Control: A Learning-Based Method for High-Performance Tracking Control // IEEE Control Syst. Magaz. 2006. Vol. 26, No. 3. P. 96–114.
3. Shen D., Wang Y. Survey on Stochastic Iterative Learning Control // Journal of Process Control. 2014. Vol. 24, P. 64-77.
4. Shen D. A Technical Overview of Recent Progresses on Stochastic Iterative Learning Control // Unmanned Systems. 2018. Vol. 6. No. 3. P. 147–164.
5. Oh Se-Kyu, Lee Jong Min. Stochastic Iterative Learning Control for Discrete Linear Time-Invariant System with Batch-Varying Reference Trajectories // Journal of Process Control. 2015. Vol. 36. P. 64–78.
6. Saab S.S. A Discrete-Time Stochastic Learning Control Algorithm, // IEEE Trans.Autom. Control. 2001. Vol 46, No. 6. P. 877-887.
7. Saab S.S. On a Discrete-Time Stochastic Learning Control Algorithm // IEEE Trans. Autom. Control. 2001. Vol. 46, No. 8, P. 1333-1336.
8. Saab S.S. Stochastic P-type/D-type Iterative Learning Control Algorithms // Int. J. Control. 2003. Vol. 76, No. 2. P. 139-148.
9. Saab S.S. A Stochastic Iterative Learning Control Algorithm with Application to an Induction Motor // Int. J. Control. 2004. Vol. 77, No. 2. P. 144-163.
10. Пакшин П.В., Емельянова Ю.П., Емельянов М.А., Галковский К., Роджерс Э. Стохастическая устойчивость некоторых классов 2D систем // Автоматика и телемеханика. 2018. № 1. С. 113-129.
11. Hladowski L.,Galkowski K., Cai Z., Rogers E., Freeman C., Lewin P. Experimentally Supported 2D Systems Based Iterative Learning Control Law Design for Error Convergence and Performance // Control Engineering Practice. 2010. Vol. 18. P. 339-348.