

УДК 681.5.01:658.5

# СТАБИЛИЗАЦИЯ ОПТИЧЕСКОГО ПРИБОРА ПРИ НЕИНВАРИАНТНОСТИ К ВОЗМУЩЕНИЯМ

**Г.Л. Дегтярев**

*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева-КАИ*  
Россия, 420011, Казань, ул. К.Маркса, 10  
E-mail: [degtyrev@mail.ru](mailto:degtyrev@mail.ru)

**А.А. Балоев**

*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева-КАИ*  
Россия, 420011, Казань, ул. К.Маркса, 10  
E-mail: [a.baloev@mail.ru](mailto:a.baloev@mail.ru)

**А.С. Мещанов**

*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева-КАИ*  
Россия, 420011, Казань, ул. К.Маркса, 10  
E-mail: [mas41@list.ru](mailto:mas41@list.ru)

**И.О. Спиридонов**

*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева-КАИ*  
Россия, 420011, Казань, ул. К.Маркса, 10  
E-mail: [igor.georg.2@gmail.com](mailto:igor.georg.2@gmail.com)

**Ключевые слова:** стабилизация, нелинейность, перекрестные связи, неопределенный момент сухого трения, инвариантность, подвижные плоскости скольжения, прямые скольжения, управление, переходные процессы, качество.

**Аннотация:** В рамках решения общей задачи стабилизации оптического прибора по углам тангажа и рыскания с малыми энергетическими затратами и регулируемым колебаниями самого управления получен метод стабилизации оси оптического прибора в скольжениях по двум прямым в фазовом пространстве, инвариантных к неопределенным возмущениям, вызванных моментами сухого трения. Для этого в обычных (первого порядка) скольжащих режимах по двум плоскостям не инвариантных к возмущениям, создаются новые скольжащие режимы, второго порядка, с размерностью меньшей на единицу в результате формирования подвижных и не проходящих через начало координат первоначальных двух плоскостей скольжения в результате введения в их выражения двух дополнительных управлений, приводящих систему в скольжащие режимы второго порядка, по прямым на двух координатных плоскостях подсистем, инвариантные к возмущениям. Осуществляется стабилизация углов с движением изображающих точек по двум заданным экспонентам.

## 1. Введение

Рассматривается модель системы стабилизации оси оптического прибора, закрепленного на гиросtabilизаторе в двухосном кардановом подвесе, с учетом динамики электродвигателей и неопределенных моментов сопротивления, как частный случай четырехосного подвеса. Исходная нелинейная двухосная модель преобразуется к двум

линейным нестационарным подсистемам с перекрестными связями и моментами сопротивления сухого трения  $M_{f1}(t) = M_{f10} + \Delta M_{f1}(t)$ ,  $M_{f2}(t) = M_{f20} + \Delta M_{f2}(t)$  с ограниченными неопределенностями  $\Delta M_{f1}(t)$ ,  $\Delta M_{f2}(t)$ :

$$(1) \quad \dot{\theta}_2 = \omega_{2z}, \quad \dot{\omega}_{2z} = a_1(t)\omega_{2z} + a_2(t)i_{\theta_2} + d_1(t)M_{f1}(t), \quad \dot{i}_{\theta_2} = a_3\omega_{2z} + a_4i_{\theta_2} + b_1u_{1\theta_2},$$

где

$$a_1(t) = (J_{zz3} - J_{xx3})\sin(2\Psi_3)\omega_{3y} / (J_{zz2} + J_{zz3}\cos^2(\Psi_3) + J_{xx3}\sin^2(\Psi_3)),$$

$$a_2(t) = (1/kd_{\theta_2}) / (J_{zz2} + J_{zz3}\cos^2(\Psi_3) + J_{xx3}\sin^2(\Psi_3)), \quad a_3 = -1/(kd_{\theta_2}L_{\theta_2}),$$

$$d_1(t) = 1/(J_{zz2} + J_{zz3}\cos^2(\Psi_3) + J_{xx3}\sin^2(\Psi_3)), \quad a_4 = -R_{\theta_2}/L_{\theta_2}, \quad b_1 = 1/L_{\theta_2};$$

$$(2) \quad \dot{\psi}_3 = \omega_{3y}, \quad \dot{\omega}_{3y} = a_5i_{\psi_3} + d_2M_{f2}(t) + F_{02}(t), \quad \dot{i}_{\psi_3} = a_6i_{\psi_3} + a_7\omega_{3y} + b_2u_{1\psi_3},$$

где

$$a_5 = 1/(J_{yy3}kd_{\psi_3}), \quad d_2 = 2/J_{yy3}, \quad F_{02}(t) = -(J_{zz3} - J_{xx3})\sin(2\Psi_3)\omega_{2z}^2 / 2J_{yy3},$$

$$a_6 = -R_{\psi_3}/L_{\psi_3}, \quad a_7 = -1/kd_{\psi_3}, \quad b_2 = 1/L_{\psi_3}.$$

## 2. Постановка задачи

Синтезировать для неинвариантных к возмущениям подсистем (1), (2) плоскости скольжения с компенсацией номинальных возмущений  $M_{f10}$ ,  $M_{f20}$  и завершающие прямые скольжения с инвариантностью к неопределенным возмущениям  $\Delta M_{f1}(t)$ ,  $\Delta M_{f2}(t)$  с обеспечением заданного качества переходных процессов по обоим углам  $\theta_2$ ,  $\psi_3$  с помощью предлагаемых управлений  $u_{1\theta_2}$ ,  $u_{2\theta_2}$  и  $u_{1\psi_3}$ ,  $u_{2\psi_3}$  и их плоскостей и прямых скольжения, а также получить методы малых энергетических затрат на управление и регулируемых установившихся параметров его колебаний в условиях неопределенных возмущений, перекрестных связей и нелинейностей.

## 3. Решение задач по углам тангажа и рыскания

### 3.1. Синтез скользящего режима по углу тангажа

Задается функция переключений  $s_1$  структур управления  $u_{1\theta_2}$

$$(3) \quad s_1 = C_1(t)\theta_2 + C_2(t)\omega_{2z} + C_3i_{\theta_2} + C_{d_1M_{f10}} + C_{\Delta 1},$$

где  $C_3 = 1$ ,  $C_{d_1M_{f10}} = d_1(t)M_{f10}/a_2(t)$ ,  $C_{\Delta 1} = d_1(t)u_{2\theta_2}(t)/a_2(t)$ . По методу эквивалентного управления В.И. Уткина находится производная  $\dot{s}_1$ , приравняваемая нулю

$$(4) \quad \dot{s}_1 = \dot{C}_1(t)\theta_2 + C_1(t)\dot{\omega}_{2z} + \dot{C}_2(t)\omega_{2z} + C_2(t)(a_1(t)\omega_{2z} + a_2(t)i_{\theta_2} + d_1(t)(M_{f10} + \Delta M_{f1})) + \\ + C_3(a_3\omega_{2z} + a_4i_{\theta_2} + b_1u_{1\theta_2}) + \dot{C}_{d_1M_{f10}} + \dot{C}_{\Delta 1} = 0,$$

где

$$\dot{C}_{d_1M_{f10}} = d(d_1(t)M_{f10}/a_2(t))/dt = (\dot{d}_1(t)M_{f10}a_2(t) - d_1(t)M_{f10}\dot{a}_2(t))/(a_2(t))^2,$$

$$\dot{C}_{\Delta 1} = d(d_1(t)u_{2\theta_2}(t)/a_2(t))/dt = \{[a_2(t)(\dot{d}_1(t)u_{2\theta_2}(t) + d_1(t)\dot{i}_{\theta_2}(t))] - [d_1(t)u_{2\theta_2}(t)\dot{a}_2(t)]\}/(a_2(t))^2.$$

Из уравнения (4) находится  $u_{1\theta_2}$ , подставляемое в третье уравнение подсистемы (1), которое из данной подсистемы исключается. В оставшуюся подсистему подставляется координата  $i_{\theta_2}$ ,  $i_{\theta_2} = -(C_1(t)\theta_2 + C_2(t)\omega_{2z} + C_{d_1M_{f10}} + C_{\Delta 1})/C_3$ , получаемая из уравнения

$$(5) \quad S_1(s_1 = C_1(t)\theta_2 + C_2(t)\omega_{2z} + C_3i_{\theta_2} + C_{d_1M_{f10}} + C_{\Delta 1} = 0), \quad C_3 = 1.$$

Получаем систему скользящего режима на плоскости  $S_1$

$$(6) \quad \dot{\theta}_2 = \omega_{2z}, \quad \dot{\omega}_{2z} = a_1(t)\omega_{2z} + a_2(t)(-C_1(t)\theta_2 - C_2(t)\omega_{2z} - C_{d_1M_{f10}} - C_{\Delta 1}) + d_1(t)(M_{f10} + \Delta M_{f1}).$$

Коэффициенты  $C_1(t)$ ,  $C_2(t)$  задаются равными

$$(7) \quad C_1(t) = -r_1/a_2(t), \quad C_2(t) = -(r_2 - a_1(t))/a_2(t),$$

чтобы система скользящего режима (6) приняла вид

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{\theta}_2 &= \omega_{2z}, \\ \dot{\omega}_{2z} &= r_1\theta_2 + r_2\omega_{2z} + d_1(t)(M_{f10} + \Delta M_{f1}) + a_2(t)(-C_{d_1M_{f10}} - C_{\Delta 1}) = \\ &= r_1\theta_2 + r_2\omega_{2z} - d_1(t)u_{2\theta_2}(t) + d_1(t)\Delta M_{f1}, \end{aligned}$$

в котором  $r_1 = -\lambda_1\lambda_2$ ,  $r_2 = \lambda_1 + \lambda_2$ , где корни  $\lambda_1, \lambda_2$  с отрицательной вещественной частью задаются по качеству переходных процессов, а составляющая  $-a_2(t)C_{d_1M_{f10}} = -d_1(t)M_{f10}$  компенсирует действие номинального возмущения  $d_1(t)M_{f10}$ .

С помощью введенного в  $s_1(3)$  параметра  $C_{\Delta 1}$  с дополнительным управлением  $u_{2\theta_2}(t)$  впервые предлагается переходить в системе (8) в рамках обычного скользящего режима на скользящий режим второго порядка, с понижением размерности системы до единицы и с инвариантностью к возмущениям. Отметим, что другие методы такого форсированного скользящего режима, Е.А. Барбашина [1] с большим значением коэффициента усиления и метод многоуровневого управления [2], могут действовать только при выполнении условий инвариантности в подсистемах (1) и (2).

С момента попадания изображающей точки (и.т.) на плоскость  $S_1(5)$  начинает действовать и дополнительное управление  $u_{2\theta_2}(t)$ . Вместе с управлением  $u_{1\theta_2}(t)$  оно обеспечивает скольжение второго порядка с полной инвариантностью к неопределенной составляющей  $\Delta M_{f1}$  сухого трения. Уравнение скользящего режима второго порядка на данной прямой

$$(9) \quad S_{12}(s_{12} = C_{12}(t)\theta_2 + C_{22}\omega_{2z} = 0), \quad C_{22} = 1,$$

согласно методу эквивалентного управления и системе (8) после отбрасывания второго уравнения и учета равенства  $\omega_{2z} = -C_{12}(t)\theta_2$  соответственно выражению прямой (9) запишется при задании  $C_{12}(t) = C_{12} = const > 0$  в виде

$$(10) \quad \dot{\theta}_2 = -C_{12}\theta_2$$

с решением равным

$$(11) \quad \theta_2(t) = \theta_2(t_n) \exp(-C_{12}(t - t_n))$$

с момента попадания  $t = t_n$  и.т. в скольжении по плоскости  $S_1$  на прямую скольжения второго порядка  $S_{12}$  с инвариантностью к неопределенному возмущению момента сухого трения  $\Delta M_{f1}$ .

### 3.2. Управление, приводящее подсистему в скользящий режим на плоскости

Управление  $u_{1\theta_2}$  и производная  $\dot{s}_1$  разбиваются на слагаемые по номинальным и неопределенным составляющим

$$(12) \quad u_{1\theta_2} = u_{1\theta_{20}} + u_{1\theta_{2\Delta}}, \quad \dot{s}_1 = \dot{s}_{10} + \dot{s}_{1\Delta},$$

$$\dot{s}_{10} = \dot{C}_1(t)\theta_2 + C_1(t)\omega_{2z} + \dot{C}_2(t)\omega_{2z} + C_2(t)(a_1(t)\omega_{2z} + a_2(t)i_{\theta_2} + d_1(t)M_{f10}) +$$

$$(13) \quad + C_3(a_3\omega_{2z} + a_4i_{\theta_2} + b_1u_{1\theta_{20}}) + \dot{C}_{d_1M_{f10}} + \dot{C}_{\Delta 1},$$

$$\dot{s}_{1\Delta} = C_3b_1u_{1\theta_{2\Delta}} + C_2(t)d_1(t)\Delta M_{f1}.$$

Номинальное управление  $u_{1\theta_{20}}$  приводит подсистему (1) в скользящий режим на плоскости  $S_1$  (5) при отсутствии неопределенных возмущений, при  $\Delta M_{f1} \equiv 0$ , для чего производная  $\dot{s}_{10}$  (13) согласно методу работы [3] приравнивается сумме  $\kappa_{g_1}g_1 + \kappa_{s_1}s_1$ :

$$(14) \quad \dot{C}_1(t)\theta_2 + C_1(t)\omega_{2z} + \dot{C}_2(t)\omega_{2z} + C_2(t)(a_1(t)\omega_{2z} + a_2(t)i_{\theta_2} + d_1(t)M_{f10}) +$$

$$+ C_3(a_3\omega_{2z} + a_4i_{\theta_2} + b_1u_{1\theta_{20}}) + \dot{C}_{d_1M_{f10}} + \dot{C}_{\Delta 1} = \kappa_{g_1}g_1 + \kappa_{s_1}s_1,$$

где  $g_1 = d_1\theta_2 + d_2(t)\omega_{2z} + d_3i_{\theta_2}$  – вспомогательная функция переключений структур управления  $u_{1\theta_{20}}$ ,  $\kappa_{g_1} = \kappa_{g_1}^+ < 0$  при  $s_1g_1 > 0$ ,  $\kappa_{g_1} = \kappa_{g_1}^- > 0$  при  $s_1g_1 < 0$ ,  $\kappa_{s_1} = \kappa_{s_1}^+ < 0$  при  $s_1g_1 > 0$ ,  $\kappa_{s_1} = \kappa_{s_1}^- < 0$  при  $s_1g_1 < 0$ . Из равенств (14) находятся выражения управлений

$$(15) \quad u_{1\theta_{20}} = u_{1\theta_{20}}^+ \text{ при } s_1g_1 > 0, \quad u_{1\theta_{20}} = u_{1\theta_{20}}^- \text{ при } s_1g_1 < 0,$$

в которых  $\dot{C}_1(t)$  и  $\dot{C}_2(t)$  в силу  $C_1(t) = -r_1/a_2(t)$ ,  $C_2(t) = -(r_2 - a_1(t))/a_2(t)$  (7) равны  $\dot{C}_1(t) = r_1\dot{a}_2(t)/(a_2(t))^2$ ,  $\dot{C}_2(t) = [a_2(t)\dot{a}_1(t) + (r_2 - a_1(t))\dot{a}_2(t)]/(a_2(t))^2$ ,  $\dot{C}_{\Delta 1}$  (4).

Управление  $u_{1\theta_{2\Delta}}$  находится из условия  $\dot{s}_{1\Delta}s_1 < 0$ , что с учетом  $\dot{s}_{10}s_1 < 0$  обеспечивает заданную скорость попадания и.т. на плоскость скольжения  $S_1$  (5). Согласно производной  $\dot{s}_{1\Delta}$  (13) условие  $\dot{s}_{1\Delta}s_1 < 0$  будет выполняться при управлении  $u_{1\theta_{2\Delta}}$  в виде

$$(16) \quad u_{1\theta_{2\Delta}} = -|C_3b_1K_1| \text{sign } s_1, \quad |C_3b_1K_1| > \max_t |C_2(t)d_1(t)\Delta M_{f1}(t)|.$$

### 3.3. Управление скольжением в координатной плоскости по прямой

Управление  $u_{2\theta_2}$  и производная  $\dot{s}_{12}$  разбиваются согласно выражению прямой скольжения  $S_{12}(s_{12} = C_{12}\theta_2 + C_{22}\omega_{2z} = 0)$ ,  $C_{12} = \text{const}$ ,  $C_{22} = 1$ , (9), на слагаемые по номинальным и неопределенным составляющим

$$(17) \quad u_{2\theta_2} = u_{2\theta_{20}} + u_{2\theta_{2\Delta}}, \quad \dot{s}_{12} = \dot{s}_{120} + \dot{s}_{12\Delta},$$

где  $\dot{s}_{120} = C_{22}r_1\theta_2 + (C_{12} + C_{22}r_2)\omega_{2z} - C_{22}d_1(t)u_{2\theta_{20}}$ ,  $\dot{s}_{12\Delta} = C_{22}d_1(t)\Delta M_{f1} - C_{22}d_1(t)u_{2\theta_{2\Delta}}$ . Слагаемое  $u_{2\theta_{20}}$  управления  $u_{2\theta_2}$  находится аналогично  $u_{1\theta_{20}}$  (12) по методу работы [3]:

$\dot{s}_{120} = C_{22}r_1\theta_2 + (C_{12} + C_{22}r_2)\omega_{2z} - C_{22}d_1(t)u_{2\theta_{20}} = \kappa_{g_{12}}g_{12} + \kappa_{s_{12}}s_{12}$ , откуда следует

$$(18) \quad u_{2\theta_{20}} = (C_{22}d_1(t))^{-1}[(C_{22}r_1\theta_2 + (C_{12} + C_{22}r_2)\omega_{2z}) - (\kappa_{g_{12}}g_{12} + \kappa_{s_{12}}s_{12})],$$

где  $g_{12} = d_{12}\theta_2 + d_{22}\omega_{2z}$  – вспомогательная функция переключений структур управления  $u_{1\theta_{20}}$ ,  $\kappa_{g_{12}} = \kappa_{g_{12}}^+ < 0$  при  $s_{12}g_{12} > 0$ ,  $\kappa_{g_{12}} = \kappa_{g_{12}}^- > 0$  при  $s_{12}g_{12} < 0$ ,  $\kappa_{s_{12}} = \kappa_{s_{12}}^+ < 0$  при  $s_{12}g_{12} > 0$ ,  $\kappa_{s_{12}} = \kappa_{s_{12}}^- < 0$  при  $s_{12}g_{12} < 0$ . Слагаемое  $u_{2\theta_{2\Delta}}$  находится из условия  $\dot{s}_{12\Delta}s_{12} < 0$  [3] преодоления действия  $\Delta M_{f1}$  в попадании и.т. на прямую  $S_{12}$  и задается с учетом  $C_{22} = 1$  и  $d_1(t) > 0$  в виде

$$(19) \quad u_{2\theta_{2\Delta}} = K \text{sign } s_{12}, \quad K > |\Delta M_{f1}|.$$

Для асимптотического приведения и.т. системы скользящего режима первого порядка в системе (8) на прямую  $S_{12}$  (9) в управлении  $u_{2\theta_2,0}$  (18) параметры  $\kappa_{g_{12}}^+$  и  $\kappa_{g_{12}}^-$  задаются нулевыми, а параметры  $\kappa_{s_{12}}^+$  и  $\kappa_{s_{12}}^-$  равными:  $\kappa_{g_{12}}^+ = \kappa_{g_{12}}^- = 0$ ;  $\kappa_{s_{12}}^+ = \kappa_{s_{12}}^- = \kappa_{s_{12}} < 0$ .

С целью дальнейшего улучшения качества переходных процессов могут применяться предлагаемые аппроксимации функций sign и их производных по времени непрерывными нелинейными функциями. Аналогично находятся управления и по углу рыскания:  $u_{1\psi_3} = u_{1\psi_3,0} + u_{1\psi_3\Delta}$ ,  $u_{2\psi_3} = u_{2\psi_3,0} + u_{2\psi_3\Delta}$ . При численном моделировании системы (1), (2) в системе программирования Матлаб (рис. 1, 2) с учетом вхождения управлений  $u_{2\theta_2}$  и  $u_{2\psi_3}$  в функцию  $s_1$  (5) и в аналогичную функцию  $s_2$  применялись управления  $u_{\theta_2} = u_{1\theta_2}$  (12) и  $u_{\psi_3} = u_{1\psi_3}$ .

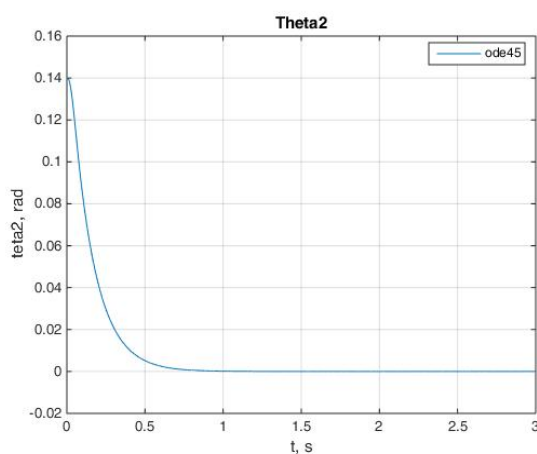


Рис. 1. Процесс стабилизации по углу  $\theta_2$ .

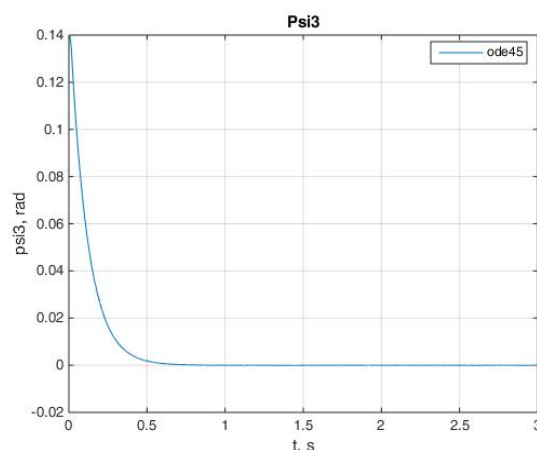


Рис. 2. Процесс стабилизации по углу  $\Psi_3$ .

Развивается метод регулирования параметров установившихся колебаний самого управления во избежание их возможного негативного воздействия на элементы системы управления, изложенный в работе [4]. С этой целью уменьшается их амплитуда в малой окрестности многообразия скольжения с помощью специального непрерывного управления в асимптотическом приближении и.т. к данному многообразию.

С целью уменьшения энергетических затрат на управление без потерь в показателях качества переходных процессов предлагаются: новые методы идентификации и

компенсации возмущений; плавный переход на расчетные значения параметров управления; различные варианты применений динамики самих объектов управления.

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160012.

## Список литературы

1. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224 с.
2. Мещанов А.С. Синтез скользящих режимов заданного порядка и качества в системах с нелинейными нестационарными объектами при возмущениях // Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева. 2014. № 3. С. 234-246.
3. Мещанов А.С. Уравнения скольжения на подвижных многообразиях и синтез векторных управлений для нелинейных объектов при неопределенных возмущениях // Вестник КГТУ им.А.Н. Туполева. 2008. № 2. С. 51-56.
4. Мещанов А.С. Регулирование колебаний на скользящих режимах для нелинейных объектов // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16-19 июня 2014 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 564-577.