УДК 629.7.052

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ УПРАВЛЕНИЯ

В.И. Каленова
НИИ механики МГУ
Россия, 117192, Москва, Мичуринский пр-т, 1
E-mail: kalen@imec.msu.ru

В.М. Морозов
НИИ механики МГУ
Россия, 117192, Москва, Мичуринский пр-т, 1
E-mail: moroz@imec.msu.ru

Ключевые слова: линейные нестационарные системы с управлением и наблюдением, приводимость, управляемость, наблюдаемость, космический аппарат, магнитное управление, калибровка инерциальной навигационной системы.

Аннотация: Предлагается аналитический подход к изучению некоторых задач управления в космической и авиационной технике, описываемых линейными нестационарными системами определенного класса. Подход основан на приведении этих систем к стационарным системам и позволяет эффективно решать указанные задачи.

1. Введение

Некоторые задачи динамики и управления движущимися объектами, приводят к необходимости исследования линейных нестационарных систем (ЛНС), которые допускают конструктивное преобразование к стационарным системам. Понятие приводимой системы введено А.М.Ляпуновым для однородных ЛНС. Это понятие было распространено авторами на линейные нестационарные системы, содержащие управления и наблюдения, в работе [1], где изучены классы ЛНС, которые допускают приведение путем конструктивного преобразования к стационарным системам большего порядка, чем исходная система. Эффективность применения предложенной теории продемонстрирована ранее при решении различных технических задач [1-4]. В [4] указаны новые классы приводимых ЛНС. В работе рассматривается ряд задач описываемых такими системами: задача стабилизации спутника при помощи магнитных моментов и задача калибровки бесплатформенной инерциальной навигационной системы.

2. Приводимые линейные нестационарные системы с управлением и наблюдением

Рассмотрим ЛНС вида

(1) $\dot{x} = Ax + B(t)u, \qquad \sigma = C(t)x.$

Здесь x $(n\times 1)$ – вектор состояния, $u(k\times 1)$ – вектор управляющих воздействий, $\sigma(l\times 1)$ – вектор наблюдений; $A(n\times n)$ – постоянная матрица.

Матрицы $B(t)$ и $C(t)$ представляются в виде

(2) $$B(t) = \sum_{j=1}^{q} \beta_j(t) B_i, \qquad (q \le nk), \quad B_i = \text{const}; \quad C(t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(t) C_i, \qquad (r \le nl).$$

Функции $\alpha_i(t)(\beta_j(t))$ являются компонентами некоторого вектора $f(t)$ $(m\times 1)^T$, $(m \ge q, m \ge r)$, удовлетворяющего уравнению

(3) $\dot{f}(t) = Sf(t), \quad S(m\times m) = \text{const}.$

Тогда система (1) ($B(t)\equiv 0$) при помощи преобразования

(4) $y = F(t)x, \qquad \underset{(mn\times n)}{F(t)} = f(t)\otimes E_n$

приводится к стационарной системе [1]

$$\dot{y} = Gy, \qquad \sigma = \Gamma y$$

$$\underset{(mn\times mn)}{G} = S\otimes E_n + E_m \otimes A, \qquad \underset{(l\times mn)}{\Gamma} = \begin{bmatrix} C_1 & \ldots & C_r & O & \ldots & O \end{bmatrix}.$$

Символ $\otimes$ обозначает кронекеровское произведение матриц.

Система (1) ($C(t)\equiv 0$) при помощи преобразования

(5) $x = F^T(t)y, \qquad \underset{(n\times mn)}{F^T(t)} = f^T(t)\otimes E_n$

приводится к стационарной системе [1]

$$\dot{y} = Ry + Qu, \ \underset{(mn\times mn)}{R} = E_m\otimes A - S^T\otimes E_n, \ \underset{(mn\times k)}{Q^T} = \begin{bmatrix} B_1^T & \ldots & B_p^T & O & \ldots & O \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим новые классы ЛНС с наблюдением или управлением

(6) $$\begin{aligned} &\dot{x}^{(1)} = A_{11}x^{(1)} + A_{12}(t)x^{(2)}, \\ &\dot{x}^{(2)} = A_{22}x^{(2)}, \qquad \sigma = C_0 x^{(1)} + C_1(t)x^{(2)}; \end{aligned}$$

(7) $$\begin{aligned} &\dot{x}^{(1)} = A_{11}x^{(1)} + B_0 u, \\ &\dot{x}^{(2)} = A_{21}(t)x^{(1)} + A_{22}x^{(2)} + B_1(t)u. \end{aligned}$$

Здесь $x^{(j)}(n_j\times 1)$ – векторы состояния ($j=1,2$), A_{jj} $(n_j\times n_j)$, $C_0(l\times n_1)$, $B_0(n_1\times k)$ – постоянные матрицы, $C_1(t)(l\times n_2), B_1(t)(n_2\times k)$, $A_{12}(t)(n_1\times n_2)$, $A_{21}(t)(n_2\times n_1)$ представляются в виде (2), (3).

Введем новые переменные для системы (6) $\underset{(mn_2\times 1)}{y}{}^{(2)} = F(t)\underset{(n_2\times 1)}{x}{}^{(2)}$; для системы (7): $\underset{(n_2\times 1)}{x}{}^{(2)} = F^T(t)\underset{(mn_2\times 1)}{y}{}^{(2)}$. Тогда $C_1(t) = \Gamma_1 F(t), \quad B_1(t) = F^T(t)Q, \quad A_{12}(t) = G_{12}F(t),$

$A_{21}(t) = F^T(t)R_{21}, \quad \Gamma_1, Q, G_{12}, R_{21} = \text{const}.$

В переменных $x^{(1)}, y^{(2)}$ системы являются стационарными

$$\dot{x}^{(1)} = A_{11}x^{(1)} + G_{12}y^{(2)},$$
$$\dot{y}^{(2)} = G_{22}y^{(2)},\ G_{22} = S \otimes E_m + E_m \otimes A_{22}. \qquad \sigma = C_0x^{(1)} + \Gamma_1 y^{(2)};$$
$$\dot{x}^{(1)} = A_{11}x^{(1)} + B_0 u$$
$$\dot{y}^{(2)} = R_{21}x^{(1)} + R_{22}y^{(2)} + Qu, \quad R_{22} = E_m \otimes A_{22} - S^T \otimes E_{n_2}$$

3. Стабилизация положения равновесия спутника при помощи магнитных моментов

В последние годы широкое распространение получили системы магнитной ориентации космических аппаратов (КА), основанные на использовании различных свойств взаимодействия КА с магнитным полем Земли. При этом могут применяться активные управляющие магнитные катушки, установленные на КА, либо системы использующие силы Лоренца, возникающие из-за взаимодействия геомагнитного поля Земли и заряженной поверхности КА (см, например, [5-7]). Указанные задачи описываются ЛНС из-за изменяющегося геомагнитного поля при движении по орбите.
Предполагается, что центр масс спутника движется по круговой орбите в гравитационном поле Земли (ω_0 – орбитальная угловая скорость).

Ориентация связанной системы координат относительно орбитальной задается углами Эйлера $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Далее будем считать, что управляющий момент $\mathbf{M}$ создается силами взаимодействия между магнитными катушками, установленными на спутнике и геомагнитным полем $\mathbf{M} = \mathbf{u} \times \mathbf{b}$. Здесь $\mathbf{u}$ – дипольный управляющий момент спутника; $\mathbf{b}(\tau) = C\mathbf{b}_0(\tau)$, где матрица C – матрица перехода от связанной системы координат к орбитальной; $\mathbf{b}_0(\tau)$ – вектор индукции геомагнитного поля в орбитальной системе координат, который аппроксимируется прямым магнитным диполем [5]:

$$\mathbf{b}_0(\tau) = \begin{bmatrix} b_1(\tau) \\ b_2(\tau) \\ b_3(\tau) \end{bmatrix} = \frac{\mu_e}{a^3} \begin{bmatrix} \cos\tau \sin I \\ -\cos I \\ 2\sin\tau \sin I \end{bmatrix}.$$

Здесь I – угол наклона плоскости орбиты к экваториальной плоскости; $\mu_e =\ 7.812 \cdot 10^6\ \ \mathrm{km}^3 \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot \mathrm{A}^{-1}$; a – радиус орбиты; $\tau = \omega_0 t$ – безразмерное время.
Хорошо известно, что уравнения движения спутника около центра масс имеет стационарное решение, соответствующее положению относительного равновесия, при котором главные центральные оси инерции совпадают с орбитальной системой координат. В рассматриваемом положении равновесия $\theta_i = 0, \dot{\theta}_i = 0, (i = 1,2,3)$.

Тогда линеаризованная в окрестности этого положения относительного равновесия система имеет вид [8]

(8) $$\ddot{x}^{(1)} + D_1\dot{x}^{(1)} + R_1 x^{(1)} = B_1(\tau)u,$$

(9) $$\ddot{x}_2 + R_2 x_2 = B_2(\tau)u.$$

Здесь $x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \theta_2 & \theta_1 \end{bmatrix}^T$, $x_2 = \theta_3$, $\qquad u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^T$;.

$$R_1 = \begin{bmatrix} -\kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_3 \end{bmatrix}, \qquad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & -g_1 \\ g_3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R_2 = -\kappa_2,$$

$$\kappa_1 = 4(J_3 - J_2)/J_1, \quad \kappa_2 = 3(J_3 - J_1)/J_2, \quad \kappa_3 = (J_1 - J_2)/J_3,$$
$$g = J_2 - J_1 - J_3, \qquad g_i = g/J_i \ (i = 1,3),$$
$$B_1(\tau) = \delta\begin{bmatrix} 0 & 2\beta_1 \sin\tau & \beta_4 \\ -\beta_5 & -\beta_3\cos\tau & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_2(\tau) = \delta\begin{bmatrix} -2\beta_2\sin\tau & 0 & \beta_2\cos\tau \end{bmatrix};$$
$$\delta = \frac{\mu_e}{a^3\omega_0^2}, \ \beta_j = \sin I/J_j \quad (\mathrm{j} = 1,2,3), \qquad \beta_4 = \cos I/J_1, \quad \beta_5 = \cos I/J_3.$$

J_1, J_2, J_3 – главные моменты инерции спутника.

Система (8), (8) относится к ЛНС, приводимых к стационарным системам в расширенном пространстве состояний [2]. Приводящее преобразование имеет вид

(10) $$x = \mathrm{e}^{i\tau}\, y^{(1)} + \mathrm{e}^{-i\tau}\, y^{(2)} + y^{(3)}$$
$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \end{bmatrix}^T, \qquad y^{(\mathrm{i})} = \begin{bmatrix} y_1^{(\mathrm{j})} & y_2^{(\mathrm{j})} & y_3^{(\mathrm{j})} \end{bmatrix}^T (\mathrm{j} = 1,2,3);$$

Стационарная система имеет вид

(11) $$\ddot{y}^{(\mathrm{j})} + G_{\mathrm{j}}\dot{y}^{(\mathrm{j})} + K_{\mathrm{j}} y^{(\mathrm{j})} = B^{(\mathrm{j})}u, \quad (\mathrm{j} = 1,2,3)$$
$$G_1 = \mathrm{diag}(D_1, 0) + 2iE_3;\ G_2 = \mathrm{diag}(D_1, 0) - 2iE_3;\ G_3 = \mathrm{diag}(D_1, 0);$$
$$K_1 = \mathrm{diag}(R_1, R_2) + iG_3 - E_3;\ K_2 = \mathrm{diag}(R_1, R_2) - iG_3 - E_3;\ K_3 = \mathrm{diag}(R_1, R_2)\ _3;$$
$$\underset{3\times 3}{B}^{(\mathrm{j})} = \left(b_{\mathrm{ks}}^{(\mathrm{j})}\right);\ b_{12}^{(1)} = -b_{12}^{(2)} = -i\beta_1;\ b_{31}^{(1)} = -b_{31}^{(2)} = i\beta_2;\ b_{22}^{(1)} = b_{22}^{(2)} = -0{,}5\beta_3;$$
$$b_{33}^{(1)} = b_{33}^{(2)} = 0{,}5\beta_2;\ b_{13}^{(3)} = \beta_4,\ b_{21}^{(3)} = -\beta_5.$$

Остальные элементы матриц $B_{\mathrm{ks}}^{\mathrm{j}}$ – нулевые, E_3 – единичная матрица (3×3).

Компоненты $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_1^{(2)} y_2^{(2)}$ удовлетворяют уравнениям, содержащим только управление u_2, а компоненты $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_1^{(2)} y_2^{(2)}$ – управление u_1, u_3. Компонента $y_3^{(3)}$, очевидно, неуправляема, и можно положить $y_3^{(3)}(\tau) \equiv 0$.

Далее ограничимся случаем $u_2 = 0$. Тогда будем считать, что $y_{\mathrm{j}}^{(\mathrm{k})}(\tau) \equiv 0 \quad (\mathrm{k,j} = 1,2)$. Исходные переменные, в соответствии с формулой (10) представляются в виде

$$x_1 = y_1^{(3)}, \qquad x_3 = y_2^{(3)}, \qquad x_2 = \mathrm{e}^{i\tau}\, y_3^{(1)} + \mathrm{e}^{-i\tau}\, y_3^{(2)}$$

Соответствующая стационарная система управляема, если не выполняются условия $J_1 = J_2 = \dfrac{3}{2}J_3$ либо $J_2 = J_3 = \dfrac{3}{4}J_1$.

Оптимальный алгоритм стабилизации положения относительного равновесия строится на основе указанной стационарной системы. Проведено математическое моделирование, подтверждающее эффективность предложенной методики.

4. Калибровка бескарданной инерциальной навигационной системы.

Рассмотрим задачу калибровки БИНС при помощи одностепенного стенда с горизонтальной осью вращения [9, 10]. В [9] была предложена процедура калибровки, состоящая из трех этапов. На каждом этапе осуществляется вращение БИНС на поворотном стенде вокруг одной из фиксированных осей. Поэтому в модели системы явным образом возникает нестационарность, вызванная изменением ориентации. Уравнения ошибок БИНС и уравнения измерений имеют вид [10]

$$\dot{\beta}_1 = u\sin\varphi\beta_2 - u\cos\varphi\beta_3 + \Theta_{22}\omega + \nu_2^0 + \left(\Theta_{21}\cos\chi + \Theta_{23}\sin\chi\right)u,$$
$$\dot{\beta}_2 = -u\sin\varphi\beta_1 + \left(\Theta_{12}\omega + \nu_1^0\right)\cos\gamma + \left(\Theta_{32}\omega + \nu_3^0\right)\sin\gamma +$$
$$+\left(\Theta_{11}\cos\chi + \Theta_{13}\sin\chi\right)u\cos\gamma + \left(\Theta_{31}\cos\chi + \Theta_{33}\sin\chi\right)u\sin\gamma,$$
$$\dot{\beta}_3 = u\cos\varphi\beta_1 + \left(\Theta_{12}\omega + \nu_1^0\right)\sin\gamma - \left(\Theta_{32}\omega + \nu_3^0\right)\cos\gamma +$$
$$+\left(\Theta_{11}\cos\chi + \Theta_{13}\sin\chi\right)u\sin\gamma - \left(\Theta_{11}\cos\chi + \Theta_{13}\sin\chi\right)u\sin\gamma -$$
$$-\left(\Theta_{31}\cos\chi + \Theta_{33}\sin\chi\right)u\cos\gamma.$$
$$\sigma_1 = -\beta_2 + \Gamma_{21}\sin\gamma + \varepsilon_2^0,$$
$$\sigma_2 = \beta_1 + \left(\varepsilon_1^0\cos\gamma + \varepsilon_3^0\sin\gamma\right) + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{11} - \Gamma_{33}\right)\sin 2\gamma - \frac{1}{2}\Gamma_{31}\cos 2\gamma + \frac{1}{2}\Gamma_{31},$$
$$\sigma_3 = \left(\varepsilon_1^0\sin\gamma - \varepsilon_3^0\cos\gamma\right) - \frac{1}{2}\Gamma_{31}\sin 2\gamma + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{33} + \Gamma_{11}\right) + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{33} - \Gamma_{11}\right)\cos 2\gamma.$$

Здесь $\chi = \gamma - \varphi$, $\gamma = \omega t$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – углы ориентации приборного трехгранника относительно географической системы координат; $\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0$ и $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \varepsilon_3^0$ – компоненты вектора погрешностей нулей датчиков угловой скорости и акселерометров, Θ_{ij} и Γ_{ij}; u_1, u_2, u_3 погрешности неортогональности осей чувствительности и масштабных коэффициентов датчиков; ω – угловая скорость стенда, φ – широта места нахождения. Рассматриваемая система относится к классу ЛНС вида (6), и исследуется на основе предложенной выше методики. Строгий анализ наблюдаемости приведенной стационарной системы для трех этапов калибровки показал, что все компоненты вектора состояния размерности 24 могут быть определены.

Список литературы

1. Каленова В.И., Морозов В.М. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. М.: Физматлит, 2010. 208 с.
2. Каленова В.И., Морозов В.М. Приводимость линейных нестационарных систем второго порядка с управлением и наблюдением // ПММ. 2012. Т. 76, Вып. 4. С. 583-588.
3. Каленова В.И, Морозов В.М. Об управлении линейными нестационарными системами специального вида // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. № 3. С. 6-15.
4. Каленова В.И., Морозов В.М. Приводимость одного класса линейных нестационарных систем с управлением и наблюдением // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019.№ 1.
5. Silani E., M. Lovera M. Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results // Control engineering practice. 2005. Vol. 13. P. 357-371.
6. Овчинников М.Ю., Пеньков В.И., Ролдугин Д.С., Иванов Д.С. Магнитные системы ориентации малых спутников. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2016. 366 с. doi:10.20948/mono-2016-ovchinnikov. URL: http://keldysh.ru/e-biblio/ovchinnikov
7. Антипов К.А., Тихонов А.А. Параметрическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в магнитном поле Земли // Автоматика и телемеханика. 2007. № 8. С. 44-55.
8. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М: Изд-во Моск. ун-та. 1975. 308 с.
9. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Ч. 2. Приложение методов оптимального оценивания к задачам навигации. М.: МАКС Пресс, 2012. 172 с.
10. Вавилова Н.Б., Парусников Н.А., Сазонов И.Ю. Калибровка бескарданных инерциальных навигационных систем при помощи грубых одностепенных стендов// Современные проблемы математики и механики. Т. 1. Прикладные исследования. М.: Изд-во Моск. ун-та. 2009. С. 212-223.