УДК 34Н05

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ПО ЗАДАННОЙ ТРАЕКТОРИИ

Ю.Л. Меньшиков
Днепровский национальный университет им. Олеся Гончара
Украина, 49010, Днепро, проспект Гагарина, 72
E-mail: Men0605Ude@gmail.com

Ключевые слова: заданная траектория, управление, динамические системы, обратная задача, критерии адекватности, приближенные модели.

Аннотация: Проблема управления движением динамических систем принадлежит к одной из проблем теории систем важных для практического применения. Наиболее значимые работы в этой области имеют уже достаточную историю [1, 2]. Однако большинство из этих работ посвящены задаче перемещения физического объекта из одной точки пространства в другую [1, 3]. Остается еще малоизученной проблема о перемещении физического объекта по заданной траектории. При этом остаются пока без внимания алгоритмы построения управления для задачи движения по заданной траектории, а также проблемы реализуемости построенных алгоритмов для практических задач, т. е. адекватность задачи управления реальным задачам. В данной работе рассмотрены некоторые из упомянутых выше вопросов для некоторых частных случаев.

1. Введение

В работе рассмотрены вопросы управления движением динамических систем по заданной траектории для случаев, когда движение физического объекта хорошо описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 3]. Для простоты будем полагать, эту систему линейной

(1) $\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,z(t),$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T$, $x_i(t) \in C[a,b]$, $1 \le i \le n$ есть вектор функция переменных состояния, $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \ldots, z_m(t))^T$, $z_j(t) \in C[a,b]$, $1 \le j \le m$ есть вектор функция внешних воздействий (управлений), $(.)^T$ – знак транспонирования, $(.)^T$ – время, A, B есть матрицы соответствующей размерности.

2. Постановка задачи управления по заданной траектории

Пусть задана необходимая траектория движения физического объекта в трехмерном пространстве в проекциях на оси декартовых координат $x_1^{ex}(t) \in C[a,b], x_2^{ex}(t) \in C[a,b], x_3^{ex}(t) \in C[a,b]$. На остальные переменные состояния накладываются лишь ограничения практического использования, например, ограничения на скорость вращения, угол поворота и т.д. Оставшиеся переменные состояния можно также включить в состав переменных, которые определяют требуемую траекторию.

Будем считать априори на основании физических соображений, что заданная траектория является возможной (доступной) для реальной физической системы, которая описывается уравнениями (1) или близка к ней в метрике $C[a,b]$. Например, траектория не должна иметь резких изменений, так как динамическая система обладает свойством инерции.

Пусть на систему (1) действует только одно внешнее воздействие (управление) $z(t)=(z_1(t),z_2(t),z_3(t))^T$, где $z_1(t),z_2(t),z_3(t)$ есть проекции управления (внешнего воздействия) на оси координат. Кроме того, в данном случае исключается влияние переменной $x_1(t)$ на переменные $x_2(t)$, $x_3(t)$ и наоборот. При этом предполагается, что траектории движения $x_1(t),x_2(t)$, $x_3(t)$ могут иметь небольшие отклонения от точных (заданных априори) траекторий:

$$\left\| x_1(t)-x_1^{ex}(t) \right\|_{C[a,b]} \le \delta_1, \left\| x_2(t)-x_2^{ex}(t) \right\|_{C[a,b]} \le \delta_2, \left\| x_3(t)-x_3^{ex}(t) \right\|_{C[a,b]} \le \delta_3,$$

где $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ есть заданные априори константы.

В силу линейности системы (1) и принятых упрощений можно получить три интегральных уравнений Вольтера первого рода относительно проекций управления (внешнего воздействия) на оси координат

$$A_1 z_1 = u_1(t) = B_1 x_1,\ A_2 z_2 = u_2(t) = B_2 x_2, A_3 z_3 = u_3(t) = B_3 x_3, \tag{2}$$

где функция $u_1(t)$ определяется только функцией $x_1(t)$, функция $u_2(t)$ определяется только функцией $x_2(t)$, функция $u_3(t)$ определяется только функцией $x_3(t)$, $u_1(t)\in U, u_2(t)\in U, u_3(t)\in U$, $U=C[a,b]$; $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ есть линейные интегральные операторы.

Пусть система совершает движение по допустимой траектории $x_1(t),x_2(t)$, $x_3(t)$, тогда выполняются неравенства

$$\left\| u_1(t)-B_1x_1^{ex}(t) \right\|_{C[a,b]} \le \Delta_1, \left\| u_2(t)-B_2x_2^{ex}(t) \right\|_{C[a,b]} \le \Delta_2,$$

$$\left\| u_3(t)-B_3x_3^{ex}(t) \right\|_{C[a,b]} \le \Delta_3,$$

где $\Delta_1 = \|B_1\|_{C\to C}\delta_1$, $\Delta_2 = \|B_2\|_{C\to C}\delta_2, \Delta_3 = \|B_3\|_{C\to C}\delta_3$.

Таким образом, задача управления движением по заданной траектории в данном случае свелась к решению трех однотипных интегральных уравнений Вольтера первого рода [4,5]. Хорошо известно, что решения этих уравнений неустойчивы к малым изменениям исходных данных (некорректная задача) для подавляющего большинства функциональных пространств Z,U, важных с точки зрения применения результатов их решения на практике.

3. Методы решения задачи управления

Для получения устойчивых решений уравнений (2) используются специальные методы регуляризации [4,5]. В данном случае решения интегральных уравнений (2) имеют некоторые особенности по сравнению с классическими решениями некорректных задач [6,7]. Обозначим множество возможных решений, например, первого уравнения в (2), как Q_{Δ_1}:

$$Q_{\Delta_1} = \{z : z\in Z, \left\| A_1 z - B_1 x_1^{ex} \right\|_{C[a,b]} \le \Delta_1\}.$$

В силу свойств интегрального оператора A_1 на важных с практической точки зрения функциональных пространствах Z,U, множество Q_{Δ_1} является неограниченным [5, 6]. Любая функция из Q_{Δ_1} является возможным решением первого интегрального уравнения (3). То есть любая функция из множества Q_{Δ_1} является решением задачи управления.

В такой ситуации не имеет смысла рассматривать вопрос о точности полученного решения задачи управления, так как отсутствует обоснованная функция, с которой необходимо сравнивать полученное решение. В классической теории некорректных задач за функцию, с которой проводится оценка точности, принимают «точное» решение z_1^{ex} первого интегрального уравнения в (2):

$$A_1\, z_1^{ex} = u_1^{ex} = B_1\, x_1^{ex}.$$

Однако, функция z_1^{ex} в данном случае не имеет никакого практического значения, поскольку операторы A_1 и B_1 определены приближенно, как и сама система (1).

В силу свойств множества Q_{Δ_1} в этих задачах есть возможность выбора из Q_{Δ_1} в определенном смысле оптимальных решений. Например, можно выбрать из множества Q_{Δ_1} решение (управление) с наименьшими энергетическими затратами на управление, решение наиболее гладкое и т.д.

4. Адекватность результатов решения задачи управления

Рассмотрим теперь вопрос о соответствии найденных управлений в задаче управления движением динамической системы (1) по заданной траектории реальным управлениям реального физического объекта. Другими словами, можно ли использовать результаты решения задачи управления системы (1) на практике? Для этого обратимся к вопросу адекватности задачи управления для динамической системы (1) и задачи практического управления реальным физическим объектом. Рассмотрим возможные критерии адекватности математического описания физического процесса с точки зрения адекватности результатов математического моделирования, предложенные в [8]. Это критерии двух типов: количественного и качественного типов.

При решении задачи управления (уравнения (2)) автоматически выполняется критерий адекватности количественного типа.

Однако, для целей дальнейшего обоснованного использования результатов решения задачи управления необходимо потребовать, чтобы между компонентами вектора параметров математической модели (1) p и реальными физическими элементами существует взаимно однозначное соответствие. Кроме этого необходимо потребовать, чтобы взаимосвязи между параметрами p математической модели соответствовали физическим законам изучаемого процесса. Это важное соответствие можно называть *основным соответствием* (ОС). Выполнение ОС можно называть *адекватностью качественного типа*.

Дополнительное требование выполнения ОС объясняется тем, что количественное совпадение результатов математического моделирования с конкретным экспериментом возможно для математических описаний качественно различных физических процессов за счет подбора параметров математических описаний. В силу этого, использование в математическом моделировании построенного адекватного математического описания количественного типа не будет обоснованным, если отсутствует адекватность качественного типа. Даны примеры.

Если динамическая система удовлетворяет двум условиям адекватности, то решение задачи управления для системы (1) будет соответствовать реальным управлениям физического объекта.

5. Заключение

В работе рассмотрены вопросы задачи управления движением по априори заданной траектории для случаев, когда движение физического объекта хорошо описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача связана с решением некорректной задачи с приближенными исходными данными. Указаны особенности решения таких задач в данном случае.

Предложено два критерия оценки адекватности результатов решения задачи управления задачам управления реальными физическими процессами.

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением . М.. Наука, 1968. 476 с.
2. Галиуллин А.С. Обратные задачи динамики. М.. Наука, 1981, 143 с.
3. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск, Изд-во БГУ, 1973, 246 с.
4. Бухгейм А.Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983. 208 с.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.. Наука, 1979. 288 с.
6. Menshikov Yu.L. Inverse Problems of Synthesis: Basic Features // Proc. of 8th International Conference on Inverse Problems. Krakow, Poland, 12-15 May, 2014. P. 107-108.
7. Меньшиков Ю.Л. Обратные задачи синтеза // Труды Всероссийской конференции «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы». Москва, 15-18 декабря 2014 г., С. 232-233.
8. Меньшиков Ю.Л. Об адекватности математического описания физического процесса // Тези XVI Міжнародна науково-практична конференція «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» MPZIS-2018. 21-24 листопада 2018, Дніпро, Україна. С. 163-164.