УДК 629.7.05

ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩИЙ АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОДВИЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ В ФОРМЕ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

В. Ф. Петрищев
АО «Ракетно-космический центр «Прогресс»
Россия, 443009, г. Самара, ул. Земеца, д. 18
E-mail: mail@samspace.ru

Ключевые слова: вектор, дискретная система, дисперсия, ковариация, математическое ожидание, матрица, обратная связь, показатель качества, состояние, управляемость, устойчивость, функция Ляпунова.

Аннотация: Предложен новый подход к решению задачи синтеза оптимального управления линейной по состоянию и управлению дискретной системой в форме отрицательной обратной связи, в которой управление на текущем шаге формируется в виде алгебраической суммы управления на предыдущем шаге и статистически взвешенной разности векторов состояния заданной и вспомогательной систем на текущем шаге. Вспомогательная система формирует желаемую программу движения в явном виде. Показатель качества выбран в форме минимума следа ковариационной матрицы управления (минимум затрат на управление) на каждом шаге. В результате минимизации следа ковариационной матрицы управления получены оптимальные выражения для весовой матрицы, взвешивающей на каждом шаге разности векторов состояния, и для ковариационной матрицы управления на текущем шаге. Получено достаточное условие асимптотической устойчивости в целом синтезированной системы управления. Предложены рекомендации по построению желаемого движения. Приведен перечень задач, решенных с использованием предложенного алгоритма. Кратко дана оценка эффективности решений каждой из этих задач.

1. Введение

В настоящее время для управления подвижными объектами в подавляющем большинстве случаев используется принцип программного управления, основанный на расчете оптимальной программной траектории и стабилизации движения объекта по этой траектории в процессе реализации [1]. При этом во многих случаях задача состоит в приведении объекта управления из некоторого произвольно заданного положения в начало координат в условиях отсутствии ограничений на управляющие параметры. Важной особенностью полученных ранее результатов является необходимость решения двухточечной краевой задачи. Эта особенность выступает достаточно весовым недостатком, который желательно исключить при разработке нового метода управления. Кроме того, вынужденное применение управления, стабилизирующего программное движение, не всегда является тривиальной задачей.

С целью исключения указанных недостатков и построения оптимальной замкнутой системы управления с отрицательной обратной связью, предложен излагаемый ниже алгоритм, названный энергосберегающим в силу минимизации затрат на управление на каждом его шаге. Важной отличительной особенностью этого алгоритма является задание желаемого программного движения в явном виде, а именно в форме вспомогательной системы. Ключевым моментом нового подхода является формирование управления на текущем шаге в виде алгебраической суммы управления на предыдущем шаге и взвешенной разности векторов состояния заданной и вспомогательной систем на текущем шаге. Весовая матрица, оптимальным образом взвешивающая разность векторов состояния заданной и вспомогательной систем, определяется в результате минимизации показателя качества системы, выбранного в форме следа ковариационной матрицы управления на текущем шаге. Предполагается, что вектор состояния заданной системы определяется в результате измерений, содержащих аддитивные погрешности измерений типа дискретного белого шума.

2. Постановка и решение задачи синтеза энергосберегающего алгоритма

В настоящей работе излагается алгоритм решения указанной задачи, разработанный на основе принципа отрицательной обратной связи. Он состоит в следующем.

Пусть подвижный объект описывается дискретной линейной по состоянию и управлению системой

(1) $X_{i+1} = A_i \cdot X_i + B_i \cdot U_i$, i=0, 1, 2, 3, ... ,

где $X_i \in R^n$ – вектор состояния системы в n-мерном евклидовом пространстве в момент времени, соответствующий номеру шага i, $U_i \in R^r$ – вектор управлений в r-мерном евклидовом пространстве в тот же момент времени, A_i – переходная матрица системы имеет размерность n×n и зависит от X_i; B_i – матрица управлений имеет размерность n×r и также зависит от X_i.

Желаемое движение системы из заданного начального положения в начало координат удобно задавать в явном виде и также в форме (1):

(2) $\xi_{i+1} = C_i \cdot \xi_i + D_i \cdot U_i$,

где $\xi_i \in R^n$. Матрицы C_i и D_i имеют размерности матриц A_i и B_i соответственно и в общем случае могут зависеть от ξ_i. Систему (2) назовем вспомогательной системой. Вспомогательная система управляется тем же вектором U_i, что и заданная система. Кроме того, требуется, чтобы начальное состояние вспомогательной системы совпадало с начальным состоянием заданной системы: $\xi_0 = X_0$.

Матрица C_i описывает движение в начало координат каждого элемента вектора состояния заданной системы. От матрицы C_i требуется, чтобы невозмущенное движение вспомогательной системы ($U_i \equiv 0$) было асимптотически устойчиво в целом. Рекомендации по выбору матриц C_i и D_i изложены ниже.

Ключевым шагом в новой постановке задачи является выбор структуры закона управления. Закон управления системы с обратной связью выбирается в линейной форме:

(3) $U_{i+1} = U_i + P_{i+1} \cdot (\tilde{X}_{i+1} - \xi_{i+1})$,

т.е. управление на текущем шаге определяется в виде алгебраической суммы управления на предыдущем шаге и взвешенной разности векторов состояния заданной и вспомогательной систем на текущем шаге. Здесь P_{i+1} – весовая матрица, оптимальным образом взвешивающая разность между векторами состояний заданной и вспомогательной систем.

Вектор состояния заданной системы определяется в результате зашумленных измерений:

(4) $$\widetilde{X}_i = X_i + e_i \,,$$

где e_i – вектор случайных аддитивных погрешностей измерений типа дискретного белого шума с заданными дисперсиями, для математических ожиданий которых выполняются равенства:

(5) $$M(e_i) = 0;\ M\left(e_i \cdot e_i^T\right) = K_e;\ M\left(e_i \cdot e_j^T\right) = 0,$$

K_e – ковариационная матрица погрешностей измерений, представляющая собой постоянную диагональную матрицу, диагональные элементы которой суть дисперсии погрешностей измерений компонент вектора состояния заданной системы.

Полагаем также, что выполняются равенства

(6) $$M\left(e_i \cdot X_i^T\right) = 0;\ M\left(e_i \cdot \xi_i^T\right) = 0.$$

По определению вводится ковариационная матрица управления на текущем шаге управления:

(7) $$K_{U,i+1} = M\left(U_{i+1} \cdot U_{i+1}^T\right).$$

Вторым, и последним шагом в новой постановке задачи является выбор показателя качества системы. Показателем качества, как следует из названия алгоритма, является минимум энергозатрат на управление на каждом шаге. Определяется он через след ковариационной матрицы управления (сумму квадратов ее диагональных элементов), являющийся функцией весовой матрицы:

(8) $$\mathfrak{J}_{i+1} = M\left(U_{i+1}^T \cdot U_{i+1}\right) = \mathrm{Tr}\left[K_{U,i+1}(P_{i+1})\right] \to \min.$$

Таким образом, задача синтеза оптимального управления (3) в такой постановке сводится к отысканию оптимального выражения для весовой матрицы системы и выражения для ковариационной матрицы управления на текущем шаге управления.

Оптимальное значение весовой матрицы P_{i+1} может быть найдено из необходимого условия минимума показателя качества (8), состоящего в том, что частная производная от следа ковариационной матрицы управления по искомой матрице P_{i+1} должна быть равна нулю:

(9) $$\frac{\partial \mathrm{Tr}\left[K_{U,i+1}(P_{i+1})\right]}{\partial P_{i+1}} = 0.$$

Вычислим ковариационную матрицу управления на текущем шаге управления. Умножая текущий вектор управления U_{i+1} (3) справа на его транспонированное значение с использованием (1) и (2) и взяв от полученного выражения математическое ожидание, после несложных преобразований будем иметь:

(10) $$\begin{aligned} K_{U,i+1} = {} & P_{i+1}\left[A_i K_{X,i} A_i^T + C_i K_{\xi,i} C_i^T + (B_i - D_i) K_{U,i} (B_i - D_i)^T + K_e\right] P_{i+1}^T + \\ & + P_{i+1}(B_i - D_i) K_{U,i} + K_{U,i}(B_i - D_i)^T P_{i+1}^T + K_{U,i}\,. \end{aligned}$$

Здесь принято

$$M\left(X_i \cdot \xi_i^T\right) = 0\,;\ M\left(X_i \cdot U_i^T\right) = 0;\ M\left(\xi_i \cdot U_i^T\right) = 0;$$

$$K_{X,i} = M\left(X_i \cdot X_i^T\right);\ K_{\xi,i} = M\left(\xi_i \cdot \xi_i^T\right).$$

Воспользовавшись правилами дифференцирования следа матрицы по матрице, из (10) получим искомое выражение для весовой матрицы:

(11) $$P_{i+1} = -K_{U,i}(B_i - D_i)^T \begin{bmatrix} A_i K_{X,i} A_i^T + C_i K_{\xi,i} C_i^T + \\ +(B_i - D_i) K_{U,i} (B_i - D_i)^T + K_{\xi,i} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Здесь показатель степени (–1) обозначает операцию обращения матрицы.

Для получения выражения для ковариационной матрицы управления, уточненного на текущем шаге с учетом полученного оптимального значения весовой матрицы на этом шаге, подставим выражение для оптимальной весовой матрицы в (10). В результате будем иметь:

(12) $$K_{U,i+1} = [P_{i+1}(B_i - D_i) + E]K_{U,i}\ .$$

Получением уравнений (11) и (12) исчерпывается решение задачи синтеза оптимального управления линейной по состоянию и управлению дискретной системой.

Достаточное условие асимптотической устойчивости в целом синтезированной системы состоит в том, чтобы приращение ковариационной матрицы управления на каждом шаге управления

(13) $$\Delta K_{U,i} = K_{U,i+1} - K_{U,i} \ = P_{i+1} \cdot (B_i - D_i) \cdot K_{U,i}$$

было отрицательным, что может проверяться в процессе функционирования системы.

3. Рекомендации по выбору матриц Ci и Di

Выбор элементов матрицы C_i производится в зависимости от желаемого поведения параметров системы. При этом могут иметь место два варианта выбора. Так, если необходимо, чтобы графики изменения параметра и его производной по времени представляли собой монотонно убывающие к нулю функции, то для описания производной целесообразно использовать функции гиперболического тангенса. Если же график желаемого изменения производной некоторого параметра отличается от монотонно убывающей функции, то для такого параметра и его производной целесообразно использовать функции полинома первой степени от значения номера шага дискретизации i величиной Δt. В соответствии с этой рекомендацией матрицу C_i, например, для задачи автоматической посадки пассажирского самолета выберем в виде:

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_i ,$$

где для описания производных по времени первых двух элементов вектора состояния – дальности до точки посадки и высоты над посадочной полосой – целесообразно использовать функции гиперболического тангенса, а для описания третьего элемента – угла тангажа самолета и его производной – использовать функции полинома первой степени от значения номера шага дискретизации i.

$$C_{1,i} = 1 - (\mathrm{th}(k_1 + (i-1)/600) + 1)/2;$$
$$C_{2,i} = 1 - (\mathrm{th}(k_2 + (i-1)/600) + 1)/2;$$
$$C_{3,i} = -0{,}00125 - 0{,}00025 \cdot (i-1);$$
$$C_{4,i} = 1 - 0{,}0002 \cdot (i-1)\ .$$

Конкретные значения параметров этих функций определяются исходя из желаемой длительности процесса посадки.

Для матрицы Di достаточно положить Di=– Bi.

4. Об эффективности энергосберегающего алгоритма

Эффективность энергосберегающего алгоритма в части энергозатрат на управление или в части улучшение конечных параметров объекта управления была подтверждена при моделировании решения следующих задач:

a) оптимального управления тягой двигателя геофизической ракеты В-2А [2];
b) оптимального управления тягой двигателей ракеты-носителя «Союз 2-1в» [2];
c) оптимального управления переориентацией малого космического аппарата «Аист-2» [2];
d) оптимального управления переориентацией космического аппарата «Ресурс-П» [3];
e) оптимальной коррекции плоскостных параметров орбиты геостационарного космического аппарата [4];
f) автоматического управления принудительной посадкой пассажирского самолета [5, 6];
g) оптимального управления тягой двигателя на заключительном участке мягкой посадки на Луну [7].

В задачах a) и b) проведен анализ эффективности энергосберегающего алгоритма в предположении возможности форсирования и глубокого дросселирования жидкостных ракетных двигателей с сохранением удельного импульса. Для вертикально поднимающейся геофизической ракеты В-2А высота подъема увеличена на 10% (с 220 км до 234 км). Для ракеты-носителя «Союз2-1в», стартующей с космодрома «Плисецк» с полезной нагрузкой 2100кг, вместо орбиты 270×595 км могла бы быть достигнута орбита 200×3980 км.

В задаче c) при использовании для переориентации штатных двигателей-маховиков энергозатраты на переориентацию МКА сокращаются в 3,5 раза по сравнению со штатными затратами. В задаче d) при использовании для переориентации КА «Ресурс-П» штатных гиродинов энергозатраты на переориентацию сокращаются более чем в 5 раз также по сравнению со штатными затратами.

Эффективность энергосберегающего алгоритма при решении задачи e) с использованием электрореактивных двигателей малой регулируемой тяги для коррекции внутриплоскостных параметров орбиты подтверждена сокращением величины потребной характеристической скорости на 20% по сравнению с известным решением с использованием трехимпульсной коррекции параметров с использованием двигателей постоянной тяги.

В задачах f) и g) продемонстрирована способность энергосберегающего алгоритма обеспечивать эффективное решение терминальных задач.

5. Заключение

Поставлена задача синтеза оптимальной линейной по состоянию и управлению дискретной системы управления с отрицательной обратной связью. В основе постановки задачи лежат:

- заданная структура вспомогательной системы, повторяющая структуру заданной системы и отражающая желаемое движение заданной системы;
- заданная структура закона управления, в которой управление на текущем шаге определяется в виде алгебраической суммы управления на предыдущем шаге и оптимально взвешенной разности векторов состояния заданной и вспомогательной систем на текущем шаге;

- показатель качества системы выбран в форме минимума следа ковариационной матрицы управления на каждом шаге.

В соответствии с поставленной задачей осуществлен синтез системы. Из условия минимума заданного показателя качества найдены выражения для оптимальной весовой матрицы и выражение для ковариационной матрицы управления на каждом шаге. В результате синтеза получен оптимальный энергосберегающий алгоритм управления.

Найдено достаточное условие асимптотической устойчивости в целом синтезированной системы, которое состоит в том, что приращение ковариационной матрицы управления на каждом шаге должно быть отрицательным.

Кратко приведена информация о перечне задач, решенных с использованием энергосберегающего алгоритма управления, и приведены результаты оценки эффективности применения алгоритма по сравнению с существующими решениями.

Список литературы

1. Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987. 711 с.
2. Петрищев В.Ф. Энергосберегающее управление объектами ракетно- космической техники. Самара: Изд-во СамНЦ РАН, 2017. 140 с.
3. Петрищев В.Ф. Энергосберегающий алгоритм управления переориентацией космического аппарата по зашумленным измерениям // Мехатроника. Автоматизация. Управление. 2017. Т. 18, № 7. С. 474-483.
4. Петрищев В.Ф. Энергосберегающее управление плоскостными параметрами геостационарного космического аппарата с помощью двигателя малой регулируемой тяги // Мехатроника. Автоматизация. Управление. 2017. Т. 18, № 12. С. 855-862.
5. Петрищев В.Ф. Энергосберегающий алгоритм автоматического управления принудительной посадкой пассажирского самолета. Часть I // Мехатроника. Автоматизация. Управление. 2018. Т. 19, № 11. С. 725-733.
6. Петрищев В.Ф. Энергосберегающий алгоритм автоматического управления принудительной посадкой пассажирского самолета. Часть II // Мехатроника. Автоматизация. Управление. 2018. Т. 19, № 12. С. 788-796.
7. Петрищев В.Ф. Энергосберегающий алгоритм автоматического управления тягой двигателя на заключительном участке мягкой посадки на Луну // Мехатроника. Автоматизация. Управление (в печати).