УДК 681.5.01

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ПО ВЫХОДУ

Н.В. Берсенев
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: nick.e-note@yandex.ru

В.А. Уткин
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: vicutkin@ipu.ru

Ключевые слова: модальное управления, спектр, выход системы, выбросы

Аннотация: Возможность оптимизации переходного процесса системы при помощи распределения корней замкнутой системы имеет большое практическое значение. Для системы общего вида невозможно обеспечить переходный процесс без перерегулирования по всем компонентам вектора состояния. В данной работе ставится задача обеспечения заданного перерегулирования скалярного выхода системы со скалярным управлением.

1. Введение

Возможность оптимизации переходного процесса системы при помощи распределения корней замкнутой системы была предложена Фельдбаумом в [1]. Основным методом исследования влияния корней системы на переходный процесс в пионерских работах [1-3] был анализ реакции системы на ступенчатое воздействие. Так, например, в работе [2] рассматриваются системы с n-кратным отрицательным действительным корнем, стандартные формы Баттерворта, где корни распределены на полуокружности в комплексной плоскости. В работе [3] оптимизируется суммарная взвешенная норма управления и норма вектора состояния системы.

Подобные методы могут служить лишь отправной точкой для поиска оптимального по переходному процессу расположения корней и не всегда показывают требуемые характеристики переходного процесса в реальной системе с ненулевыми начальными условиями.

Оценки переходного процесса при заданном распределении корней были получены в работах [4-6].

2. Процедура поиска спектра

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим SISO-систему общего вида:

(1) $$\dot{x} = Ax + bu, y = d^T x, u = f^T x,$$

При начальных условиях вектора состояния $|x(0)| \le 1$.

Согласно теореме Измайлова [5] существует $\gamma = \gamma(A, B)$ такое, что для любого $\sigma > 0$ при собственных значениях замкнутой системы $\operatorname{Re}\lambda_i \le -\sigma, i = 1, \ldots, n$ и соответствующей им строке f справедливо:

(2) $$\max_{0 \le t \le 1/\sigma} \max_{|x(0)| \le 1} |x(t)| \ge \gamma \sigma^{n-1}.$$

В силу этой теоремы задача обеспечения заданного выброса вектора состояния не имеет решения.

Для системы (1) ставится задача выбора строки обратной связи f так, чтобы обеспечить заданное перерегулирование $\Delta > 0$ системы по выходу:

(3) $$y(t) \in \begin{cases} [-\Delta; y(0) + \Delta], & y(0) \ge 0 \\ [y(0) - \Delta; \Delta], & y(0) < 0 \end{cases}.$$

2.2. Процедура синтеза субоптимального управления

Выполним ортогональное преобразование $\overline{x} = Tx$, такое что $d^T T = C\begin{pmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}^T$, тогда $y = d^T x = d^T T \overline{x} = \overline{x}_1$.

Блочным методом приведем замкнутую систему к верхнетреугольному виду, назначив фантомные действительные собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$:

(4) $$\begin{pmatrix} \dot{\overline{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим за Δ_i перерегулирование *i*-ой компоненты вектора состояния. Рассмотрим последнюю строчку системы (4). Очевидно, уравнение $\dot{\tilde{x}}_n = \lambda_n \tilde{x}_n$ имеет решение без перерегулирования, т.е. $\Delta_n = 0$.

Далее рассмотрим систему $\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_{n-1} \\ \dot{\tilde{x}}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{n-1} & c_{n-1,n} \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{n-1} \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$. Перерегулирование $\tilde{x}_{n-1}$ можно оценить сверху $\Delta_{n-1} \le \left| \dfrac{c_{n-1,n} \tilde{x}_n(0)}{\lambda_{n-1} + \lambda_n} \right|$. Доказательство приведено в разделе 2.3 на примере второго порядка.

Будем последовательно рассматривать таким образом подсистемы (4) вида

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_i \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_i \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix},$$

и вычислять перерегулирование $\tilde{x}_i$ как функцию собственных значений матрицы замкнутой системы и начальных условий вектора состояния. Тогда получим $\Delta_1 = \Delta_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Задавшись неравенством $\Delta_1 \le \Delta,$ получим спектр, необходимый для обеспечения заданного перерегулирования исходной системы по выходу.

2.3. Пример второго порядка

Рассмотрим систему второго порядка со скалярным управлением:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} Fx,\ y = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} x,$$

Блочным методом сделаем замену и выберем управление:

$$a_{12}\overline{x}_2 = (a_{11} - \lambda_1)x_1 + a_{12}x_2;$$

$$Fx = f_1 x_1 + f_2 x_2 = \lambda_2 \overline{x}_2 - a_{21}x_1 + a_{22}\overline{x}_2.$$

Имеем:

(5)
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\overline{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix},\ y = dx_1$$

Эта система не имеет перерегулирования по $\overline{x}_2$:

(6)
$$\overline{x}_2(t) = \overline{x}_2(0)e^{\lambda_2 t} = \left(\frac{a_{11} - \lambda_1}{a_{12}} x_1(0) + x_2(0) \right) e^{\lambda_2 t};$$

Без ограничения общности будем полагать, что $x_1(0) \geq 0$. Функция $\dot{x}_1(t)$ может иметь не более одного нуля при $t > 0$. Если $\dot{x}_1(t)$ не имеет нулей, $x_1(t)$ монотонна и не имеет перерегулирования.

Пусть $\dot{x}_1(\tau) = 0$, функция $x_1(t)$ имеет экстремум и, следовательно, ненулевое перерегулирование $\Delta_1 = \begin{cases} x_1(\tau) - x_1(0), & x_1(\tau) \geq 0, \\ -x_1(\tau), & x_1(\tau) < 0. \end{cases}$.

Тогда имеем:

(7)
$$\dot{x}_1(\tau) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 x_1(\tau) + a_{12}\overline{x}_2(0)e^{\lambda_2 \tau} = 0,$$

$$x_1(\tau) - x_1(0) = \int_0^\tau \left(\lambda_1 x_1 + a_{12}\overline{x}_2(0)e^{\lambda_2 t} \right) dt,$$

Учитывая (7), имеем:

(8)
$$\left| \int_0^\tau a_{12}\overline{x}_2(0)e^{\lambda_2 t} dt \right| = \left| a_{12}\overline{x}_2(0) \frac{e^{\lambda_2 \tau} - 1}{\lambda_2} \right| = \left| \frac{-\lambda_1 x_1(\tau) - a_{12}\overline{x}_2(0)}{\lambda_2} \right|.$$

Если $x_1(\tau) \geq 0$, из (8) имеем:

$$\Delta_1 = x_1(\tau) - x_1(0) < \left| \int_0^\tau a_{12}\overline{x}_2(0)e^{\lambda_2 t} dt \right| = \left| \frac{-\lambda_1 x_1(\tau) - a_{12}\overline{x}_2(0)}{\lambda_2} \right| =$$

$$= \frac{-\lambda_1 x_1(0) - \lambda_1 \Delta_1 - a_{12}\overline{x}_2(0)}{\lambda_2} \Rightarrow \Delta_1 < \frac{-\lambda_1 x_1(0) - a_{12}\overline{x}_2(0)}{\lambda_1 + \lambda_2} < \left| \frac{a_{12}\overline{x}_2(0)}{\lambda_1 + \lambda_2} \right|.$$

Если $x_1(\tau) < 0$, а $x_1(t_0) = 0$:

$$\Delta_1 = -x_1(\tau) < \left| \int_{t_0}^\tau a_{12}\overline{x}_2(0)e^{\lambda_2 t} dt \right| < \left| \int_0^\tau a_{12}\overline{x}_2(0)e^{\lambda_2 t} dt \right| = \frac{\lambda_1 x_1(\tau) + a_{12}\overline{x}_2(0)}{\lambda_2} =$$

$$= \frac{-\lambda_1 \Delta_1 + a_{12}\overline{x}_2(0)}{\lambda_2} \Rightarrow \Delta_1 < \frac{a_{12}\overline{x}_2(0)}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Тогда имеем, учитывая (6):

(9)
$$\Delta_1 < \left| \frac{a_{12}\overline{x}_2(0)}{\lambda_1 + \lambda_2} \right| = \left| \frac{(a_{11} - \lambda_1)x_1(0) + a_{12}x_2(0)}{\lambda_1 + \lambda_2} \right| \overset{x_1^2(0) + x_2^2(0) = 1}{\leq} \frac{\sqrt{(a_{11} - \lambda_1)^2 + a_{12}^2}}{-\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Тогда для обеспечения перерегулирования по выходу не больше заданной Δ достаточно выбрать собственные значения матрицы замкнутой системы так, чтобы

$$\lambda_2 < -\lambda_1 - \frac{|d|\sqrt{(a_{11}-\lambda_1)^2 + a_{12}^2}}{\Delta}.$$

3. Качество полученных оценок

Для нескольких верхнетреугольных матриц замкнутых систем вида (5) были численно найдены реальные выбросы Δ_{real} по выходу при начальных условиях $|x(0)| = 1$. Ниже приведены сравнения оценок Δ_{comp}, полученных в (9), с этими данными:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x, \Delta_{real} = 0,25, \Delta_{comp} = 0,33;$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x, \Delta_{real} = 1, \Delta_{comp} = 1,33;$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} x, \Delta_{real} = 0,48, \Delta_{comp} = 0,6;$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -5 & 47 \\ 0 & -24 \end{pmatrix} x : \Delta_{real} = 1,3, \Delta_{comp} = 1,6.$$

Полученные субоптимальные оценки оказались несколько завышенными по сравнению с реальным перерегулированием, но, тем не менее, вполне пригодными для синтеза законов управления на их основе.

4. Заключение

В данной работе предложен алгоритм синтеза модального управления для SISO-систем, обеспечивающий заданное перерегулирование по выходу. Также получены оценки перерегулирования по выходу для систем второго порядка, которые можно считать удовлетворительными.

Список литературы

1. Фельдбаум А.А. О распределении корней характеристического уравнения систем регулирования // Автоматика и телемеханика. 1948. № 4. С. 253-279.
2. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976.
3. Woodhead M.A., Porter B. Optimal modal control // Measurements and Control, 1973. Vol. 6. P. 301-303.
4. Полоцкий В.Н. О максимальных ошибках асимптотического идентификатора состояния // Автоматика и телемеханика. 1978. № 8. С. 26-32.
5. Измайлов Р.Н. Эффект «всплеска» в стационарных линейных системах со скалярными входами и выходами // Автоматика и телемеханика. 1987. № 8. С. 56-62.
6. Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В., Щербаков П.С., Смирнов Г.В. Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // Автоматика и телемеханика. 2015. № 6. С. 18-41.