УДК 62.50

НАИХУДШИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПРОТИВОУДАРНЫМ ИЗОЛЯТОРОМ С УПРЕЖДАЮЩИМ УПРАВЛЕНИЕМ

Н.Н. Болотник
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
Россия, 119526, Москва, проспект Вернадского, 101, к. 1
E-mail: bolotnik@ipmnet.ru

В.А. Корнеев
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
Россия, 119526, Москва, проспект Вернадского, 101, к. 1
E-mail: korneev@ipmnet.ru

Ключевые слова: противоударная изоляция, оптимальное управление.

Аннотация: Исследуется задача о наихудшем возмущении применительно к проблеме противоударной изоляции объекта на подвижном основании при неполной информации об ударном воздействии и упреждающем управлении. Под наихудшим возмущением понимается ударное воздействие на основание, при котором максимальная по времени величина смещения объекта относительно основания, принятая за критерий качества, при данном управлении – наибольшая. Проведено сравнение по критерию качества ряда режимов управления при наихудших возмущениях.

1. Модель системы противоударной изоляции

Система состоит из основания и объекта, соединенного с основанием посредством противоударного изолятора – устройства, генерирующего управляющую силу f между основанием и объектом и предназначенного для защиты объекта при ударном воздействии на основание. Движения основания и объекта предполагаются поступательными вдоль одной прямой. Обозначим: z – смещение основания относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета, x – смещение объекта относительно основания, m – масса объекта. Ударное воздействие на основание моделируется его ускорением $\ddot{z}$, заданным как функция времени.

Движение объекта относительно основания описывается уравнением

$$\ddot{x} + u = v(t), \quad u = \frac{f}{m}, \quad v = -\ddot{z}. \tag{1}$$

На управляющую силу f налагается ограничение $|f| \leqslant F_0$, где F_0 – заданная величина, тогда величина u удовлетворяет неравенству

$$|u| \leqslant u_0, \quad u_0 = \frac{F_0}{m}.$$

Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ основание и объект покоятся в положениях, отвечающих нулевым значениям координат x и z:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0. \tag{2}$$

В качестве допустимых управлений будем рассматривать кусочно-непрерывные функции $u(t)$, удовлетворяющие ограничению $|u(t)| \leqslant u_0$.

Рассматриваются ударные воздействия (возмущения) вида

$$v(t) = V(t - t_0), \;\; t_0 \geqslant 0,$$

где $V(\xi)$ – кусочно-непрерывная функция, определенная для всех вещественных ξ и обладающая следующими свойствами: 1) возмущение действует только в одном направлении ($V(\xi) \geqslant 0$), 2) имеет конечную длительность T ($V(\xi) \equiv 0$, если $\xi < 0$ или $\xi > T$) и 3) только на одном интервале, $t_1 < \xi < t_2$, величина абсолютного ускорения $V(\xi)$ основания превышает верхнюю границу u_0 абсолютного ускорения защищаемого объекта:

$$V(\xi) < u_0 \text{ для } 0 \leqslant \xi < t_1 \text{ и } t_2 < \xi \leqslant T; \quad V(t) > u_0 \text{ для } t_1 < \xi < t_2.$$

Один или оба из интервалов $0 \leqslant \xi < t_1$ и $t_2 < \xi \leqslant T$ могут быть пустыми, если $V(0) > u_0$ или $V(T) > u_0$. Базовыми характеристиками ударного воздействия являются его длительность T и интеграл

$$v_0 = \int\limits_0^T V(\xi) d\xi,$$

характеризующий величину скорости, приобретенной (или потерянной) основанием в результате удара. Параметры T, v_0 предполагаются известными и заданными. Такой класс возмущений обозначим V_T. При $t_0 > 0$ возмущение $v(t)$ начинает действовать спустя t_0 единиц времени после начала управления, то есть допускается упреждающее управление.

2. Критерий качества и задачи оптимизации

Будем считать, что возмущение $V(\xi)$ неизвестно, но известно множество $\Omega \subseteq V_T$, которому могут принадлежать возможные возмущения. Качество изоляции при заданных управлении $u(t)$ и времени упреждения t_0 будем оценивать функционалом J, характеризующим максимальную величину смещения объекта относительно основания при наихудшем возмущении:

$$J(u,\, t_0) = \max_{V \in \Omega} \max_{t \in [0,\infty)} |x(t; u, V, t_0)|, \tag{3}$$

где $x(t; u, V, t_0)$ – решение уравнения (1) с начальными условиями (2) для заданных $u(t)$, $V(\xi)$ и t_0. Величину J желательно минимизировать выбором оптимального закона управления и времени упреждения.

При формулировке задач классы внешних воздействий определяются не только свойствами возмущений, но и условиями информированности управляющей стороны о внешнем возмущении.

Задача 1. *Для системы (1) с начальными условиями (2) найти допустимое управление u_* и время упреждения t_0^*, которые минимизируют величину (3):*

$$J(u_*, t_0^*) = \min_{u\in U,\, t_0} J(u, t_0), \tag{4}$$

где U – множество законов управления $u(t)$, среди которых ищется оптимум.

Это задача о гарантирующем оптимальном упреждающем управлении противоударным изолятором, защищающим объект от ударных воздействий из множества Ω. Она обобщает задачу, рассмотренную в [1–3] для заданного возмущения при отсутствии упреждения управления.

Задача 2. *Для заданных допустимого управления $u(t)$ и времени упреждения t_0^* вычислить величину $J(u, t_0)$ из (4).*

Решение задачи 2 (о наихудшем возмущении) строится на основе леммы [4].

Лемма. *Среди возмущений $V \in V_T$ наихудшее возмущение есть либо $V(\xi) = v_0\delta(\xi)$ либо $V(\xi) = v_0\delta(\xi - T)$. Иными словами, наихудшее возмущение есть мгновенный удар интенсивности v_0, подаваемый в начальный или в конечный момент допустимого интервала возмущения.*

Согласно этой лемме для нахождения наихудшего возмущения при заданных $u(t)$ и t_0 надо решить дифференциальное уравнение (1) с начальными условиями (2) при $v(t) = v_0\delta(t - t_0)$ и $v(t) = v_0\delta(t - t_0 - T)$, для каждого из решений вычислить $\max_t |x(t)|$, сравнить получившиеся величины и выбрать возмущение, отвечающее большему значению.

3. Аналитические решения для мгновенного удара и для возмущения прямоугольной формы

Далее будем использовать безразмерные переменные

$$x' = \frac{u_0}{v_0^2}\,x,\;\; t' = \frac{u_0}{v_0}\,t,\;\; t_0' = \frac{u_0}{v_0}\,t_0,\;\; T' = \frac{u_0}{v_0}\,T,\;\; \tau' = \frac{u_0}{v_0}\,\tau,$$
$$v'(t') = \frac{1}{v_0}\,v\left(\frac{v_0}{u_0}\,t'\right),\;\; u' = \frac{u}{u_0},\;\; J' = \frac{u_0}{v_0^2}\,J,$$

опуская штрихи. В этих переменных $u_0 = 1$ и $v_0 = 1$.

Мгновенный удар. Мгновенный удар моделируется дельта-функцией Дирака:

$$V(\xi) = \delta(\xi).$$

Для этого возмущения задача 1 решена в [5]. Оптимальное управление, оптимальное время упреждения и значение критерия качества определяются соотношениями

$$u_\delta(t) = \begin{cases} -1,\ 0 \leqslant t \leqslant t_1^\delta = \dfrac{1}{4}, \\ 1,\ t_1^\delta < t \leqslant t_2^\delta = \dfrac{3}{2}, \\ 0,\ t > t_2^\delta = \dfrac{3}{2}, \end{cases} \qquad t_0^\delta = 1, \quad J_\delta = \frac{1}{16}.$$

Возмущение прямоугольной формы (прямоугольный импульс). Прямоугольный импульс характеризуется кусочно-постоянной функцией $V(\xi)$, определяемой соотношением

$$V = V(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{T}, & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Оптимальное управление $u(t)$, оптимальное время упреждения t_0 и оптимальное значение критерия качества J определяются соотношениями

$$u_r(t) = \begin{cases} -1,\ 0 \leqslant t \leqslant t_1^r = \dfrac{1}{4}\sqrt{1-T},\ T < 1, \\ 1,\ t_1^r < t \leqslant t_2^r = \dfrac{1}{2}\sqrt{1-T} + 1,\ T < 1, \\ 0,\ t > t_2^r,\ T < 1, \\ v(t),\ T \geqslant 1, \end{cases}$$

$$t_0^r = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[(1-T) + \sqrt{1-T}\right],\ T < 1, \\ 0, \quad T \geqslant 1, \end{cases}$$

$$J_r = \begin{cases} \dfrac{1}{16}\,(1-T)\,, \quad T < 1, \\ 0, \quad T \geqslant 1. \end{cases}$$

Индекс r указывает, что данные соотношения относятся к прямоугольному импульсу. Решение для прямоугольного импульса приближается к решению для мгновенного удара, когда длительность импульса стремится к нулю.

Решим задачу 2 о наихудшем возмущении из класса V_T для управлений, оптимальных для мгновенного удара и для возмущения прямоугольной формы. Значения J_{dT} и J_{rT} критерия качества для соответствующих управлений при наихудшем возмущении определяются выражениями

$$J_{dT} = \begin{cases} \dfrac{T^2+T}{2} + \dfrac{1}{16}, \quad 0 \leqslant T < 0.5, \\ T - \dfrac{1}{16}, \quad T \geqslant 0.5, \end{cases} \qquad J_{rT} = \begin{cases} \dfrac{1+7T}{16},\ T < 1, \\ \dfrac{T}{2},\ T \geqslant 1. \end{cases}$$

Зависимости величин J_{dT} и J_{rT} от $1/T$ изображены сплошными кривыми на рис. 1. График функции $J_{dT}(1/T)$ лежит выше графика функции $J_{rT}(1/T)$. Это означает, что для всех T управление, оптимальное для прямоугольного возмущения, приводит к меньшему гарантированному (рассчитанному на наихудшее возмущение) значению критерия качества J, чем управление, оптимальное для мгновенного удара.

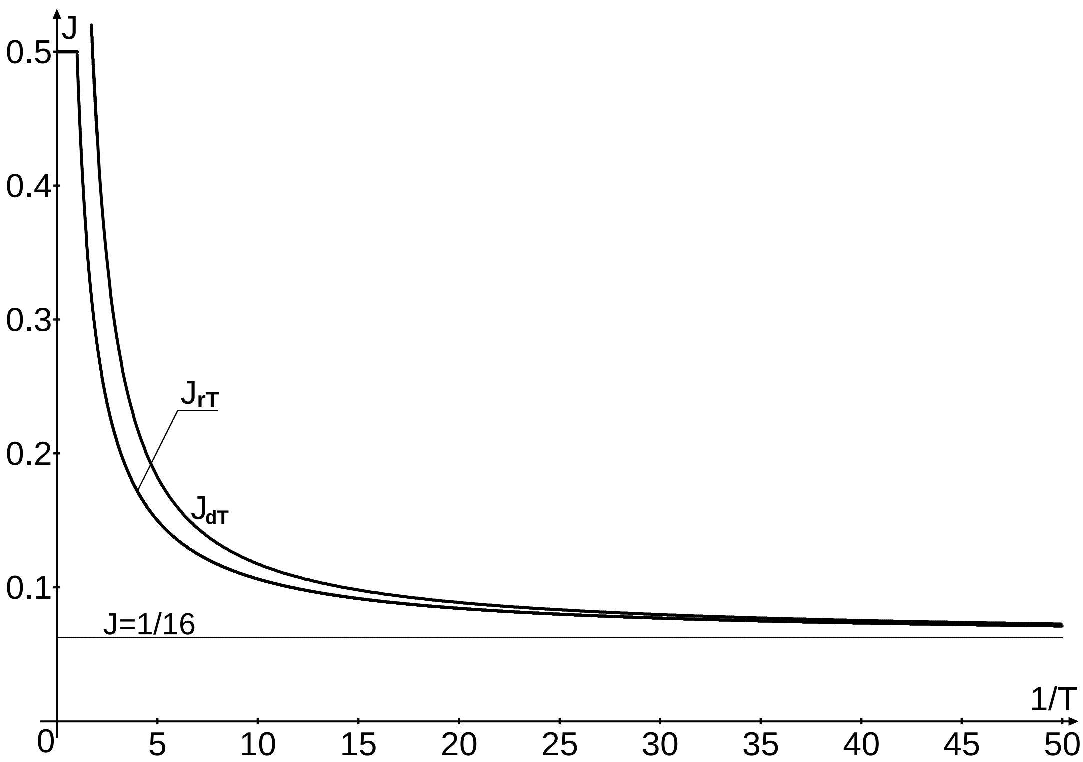

Рис. 1.

4. Заключение

Разработана методика определения среди возмущений фиксированной длительности наихудших возмущений, доставляющих наибольшее значение максимальной величине смещения защищаемого объекта относительно основания, для заданного закона управления. Доказано, что наихудшее возмущение есть мгновенный удар, прилагаемый к основанию в начальный или конечный моменты разрешенного интервала действия возмущения. Для управления, оптимального для мгновенного удара, и управления, оптимального для внешнего воздействия прямоугольной формы, найдены наихудшие возмущения и соответствующие им значения критерия качества.

Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А17-117021310387-0 при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-01-00538-а и 17-08-00742-а).

Список литературы

1. Гурецкий В.В. Об одной задаче оптимального управления // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 1. С. 159-162.
2. Гурецкий В.В. О задаче минимизации максимального смещения // Труды ЛПИ. Механика и процессы управления. 1969. № 307. С. 11-21.
3. Sevin E. and Pilkey W. Optimum Shock and Vibration Isolation. Washington DC: Shock and Vibration Information Analysis Center, 1971. 162 p.
4. Болотник Н.Н., Корнеев В.А. Противоударная изоляция с упреждающим управлением для внешних возмущений различной формы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2018. № 3. С. 48-63.
5. Balandin D.V., Bolotnik N.N.,Pilkey W.D. Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 2001. 436 p.