УДК 517.977

СТРАТЕГИЯ С ЗАМЫКАНИЕМ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ГАРАНТИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В MPC

Н.М. Дмитрук
Белорусский государственный университет
Беларусь, 220030, Минск, пр. Независимости, 4
E-mail: dmitrukn@bsu.by

Д.А. Костюкевич
Белорусский государственный университет
Беларусь, 220030, Минск, пр. Независимости, 4
E-mail: kostukDA@bsu.by

Ключевые слова: оптимальное гарантированное управление, стратегия управления, управление по прогнозирующей модели.

Аннотация: Рассматривается задача оптимального управления линейной дискретной системой с неизвестными ограниченными возмущениями, которую требуется за конечное время перевести с гарантией на терминальное множество, обеспечивая при этом минимум гарантированного значения заданного критерия качества. Определяется оптимальная стратегия управления, учитывающая информацию об одном будущем состоянии объекта. Предлагается эффективный метод ее построения и алгоритм управления по прогнозирующей модели на основе оптимальных стратегий.

1. Введение

Задачи оптимального управления динамическими системами, подверженными действию неизвестных возмущений или содержащими другие недоступные для непосредственных измерений параметры, для которых требуется получить гарантированный результат, рассматриваются в литературе с конца 60-х [1–3]. В настоящее время обширной областью применения задач оптимального управления является теория управления по прогнозирующей модели (Model Predictive Control — MPC), а для задач управления в условиях неопределенности — ее робастная версия [4, 5].

Теория MPC [4] опирается на решение в ходе конкретного процесса управления в каждый текущий момент времени прогнозирующих задач оптимального управления на конечном промежутке времени с начальным состоянием, совпадающим с текущим состоянием процесса. Оптимальная программа прогнозирующей задачи подается на вход системы управления до тех пор, пока не будет получено и обработано следующее состояние. Повторяемая в темпе поступления информации о состоянии системы процедура дает реализацию обратной связи, обеспечивающую различные полезные свойства замкнутой системы (асимптотическая устойчивость, робастность и др.).

В робастной версии MPC, начиная с работы [5], для формирования обратной связи предлагается использовать не оптимальные гарантирующие программы, а оптимальные стратегии, учитывающие зависимость управляющих воздействий от информации о текущих и будущих состояниях процесса управления. Основное внимание уделяется определению стратегий, допускающих их эффективное построение [6, 7].

Настоящее сообщение примыкает к работам [8–10], в которых стратегия управления определяется в предположении о коррекции управляющих воздействий в один будущий момент времени. В отличие от [8–10] качество управления оценивается функционалом из [7], что позволяет применять предложенные стратегии в MPC, определяет актуальность исследования и широкий спектр приложения результатов.

2. Задача оптимального гарантированного управления и стратегия управления

Рассмотрим дискретную линейную стационарную систему с возмущением

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \quad x(0) = x_0, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1. \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r$ — управляющее воздействие, $w(t) \in W \subset \mathbb{R}^p$ — неизвестное возмущение; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$; множества U, W имеют вид $U = \{u \in \mathbb{R}^r : \ ||u||_\infty \leqslant u_{\max}\}$, $W = \{w \in \mathbb{R}^p : \ ||w||_\infty \leqslant w_{\max}\}$, где норма $||z||_\infty = \max_i |z_i|$.

Целью управления системой (1) является: 1) ее перевод с гарантией на терминальное множество $X_T = \{x \in \mathbb{R}^n : Hx \leqslant g\}$; 2) минимизация гарантированного значения критерия качества как в [7]:

$$J(u) = \max_w \sum_{t=0}^{T-1} (||Qx(t)||_\infty + ||Ru(t)||_\infty) + ||Px(T)||_\infty. \tag{2}$$

Здесь $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $g \in \mathbb{R}^m$, Q, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{r\times r}$. При построении MPC-регулятора матрицы Q, P, R являются параметрами настройки и подбираются в зависимости от желаемого поведения замкнутой системы [4].

Известно [5], что оптимальная гарантирующая программа $u^0(t) \in U$, $t = 0, \ldots,$ $T-1$, — управляющее воздействие, которое при всех возможных возмущениях $w(t) \in W$, $t = 0, \ldots, T-1$, гарантирует выполнение включения $x(T) \in X_T$ и доставляет минимум (2), — недооценивает потенциальные возможности системы управления, поскольку не учитывает возможность поступления информации о ее поведении в будущем. Такую возможность учтем, определив далее стратегию управления.

Пусть $T_1 \in \{1, 2, \ldots, T-1\}$ — некоторый момент времени. Он разбивает промежуток управления на $\Delta_0 = \{0, 1, \ldots, T_1 - 1\}$ и $\Delta_1 = \{T_1, T_1+1, \ldots, T-1\}$. Следуя [8, 10], назовем T_1 моментом замыкания системы (1).

Для промежутков Δ_k, $k = 0, 1$, определим: $u_k(\cdot) = (u_k(t) \in U, t \in \Delta_k)$, $w_k(\cdot) = (w_k(t) \in U, t \in \Delta_k)$ — управление и возмущение, $\mathcal{U}_k = \{u_k(\cdot) : u_k(t) \in U, t \in \Delta_k\}$, $\mathcal{W}_k = \{w_k(\cdot) : w_k(t) \in W, t \in \Delta_k\}$ — множество доступных управляющих воздействий и множество возможных возмущений на k-ом промежутке; $X(T_1|x_0, u_0(\cdot)) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(T_1|x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot)), w_0(\cdot) \in \mathcal{W}_0\}$, $X(T|x_1, u_1(\cdot)) = \{x \in \mathbb{R}^n : x =$

$x(T|x_1, u_1(\cdot), w_1(\cdot)), w_1(\cdot) \in \mathcal{W}_1\}$ — множества всех возможных состояний в моменты времени T_1 и T, где $x(t|x_k, u_k(\cdot), w_k(\cdot))$ — состояние системы (1) с начальным условием $x(0) = x_0$ или $x(T_1) = x_1$ под действием управления $u_k(\cdot)$ и возмущения $w_k(\cdot)$.

Предположение 1. *До начала процесса управления известно, что в момент T_1 будет измерено текущее состояние $x_1 = x(T_1|x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot))$, с учетом которого можно будет выбрать новое управляющее воздействие $u_1(\cdot) = u_1(\cdot|x_1)$ на Δ_1.*

С учетом предположения 1 и следуя работам [9, 10], будем искать решение рассматриваемой задачи в виде *стратегии управления* с моментом замыкания T_1

$$\pi_1 = \pi_1(0, x_0) = \{u_0(\cdot|x_0);\; u_1(\cdot|x_1), x_1 \in X(T_1|x_0, u_0(\cdot|x_0))\},$$

где $u(\cdot|x_k) = (u_k(t|x_k), t \in \Delta_k)$ — управляющее воздействие на Δ_k, $k = 0, 1$.

Траекторию системы управления (1), соответствующую стратегии π_1 и возмущению $w(\cdot)$, определим [9, 10] как последовательное решение двух систем:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu_0(t|x_0) + Mw_0(t),\;\; x(0) = x_0,\;\; t \in \Delta_0;$$

$$x(t+1) = Ax(t)+Bu_1(t|x(T_1))+Mw_1(t), x(T_1) = x(T_1|x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot)), t \in \Delta_1.$$

Определение 1. *Стратегия π_1 называется допустимой стратегией управления с моментом замыкания T_1, если*

$$X(T|x_1, u_1(\cdot|x_1)) \subseteq X_T \;\;\forall x_1 \in X(T_1|x_0, u_0(\cdot|x_0)).$$

Определим оптимальную стратегию управления с моментом замыкания T_1

$$\pi_1^0 = \pi_1^0(0, x_0) = \{u_0^0(\cdot|x_0); u_1^0(\cdot|x_1), x_1 \in X(T_1|x_0, u_0^0(\cdot|x_0))\}, \tag{3}$$

где управляющее воздействие $u_0^0(\cdot|x_0)$ назовем оптимальной начальной программой.

Задача управления на промежутке Δ_1 для некоторого состояния x_1 заключается в отыскании оптимальной гарантирующей программы $u_1^0(\cdot|x_1)$, которая является решением задачи

$$J_1(x_1) = \min_{u_1(\cdot)\in\mathcal{U}_1} \max_{w_1(\cdot)\in\mathcal{W}_1} \Big\{ \sum_{t\in\Delta_1} (||Qx(t|x_1, u_1(\cdot), w_1(\cdot))||_\infty + ||Ru_1(t)||_\infty) + \\ + ||Px(T|x_1, u_1(\cdot), w_1(\cdot))||_\infty \Big\}, \tag{4}$$

при условии $x(T|x_1, u_1(\cdot|x_1), w_1(\cdot)) \in X_T \;\; \forall w_1(\cdot) \in \mathcal{W}_1$. Если задача (4) не имеет решения, полагаем $J_1(x_1) = +\infty$.

Предположение 2. *Параметры задачи таковы, что непусто множество $X_1 = \{x_1 : J_1(x_1) < +\infty\}$ и $\exists u_0(\cdot|x_0)$, обеспечивающее включение $X(T_1|x_0, u_0(\cdot|x_0)) \subseteq X_1$.*

В предположении 2 стратегия $\pi_1 = \{u_0(\cdot|x_0); u_1^0(\cdot|x_1), x_1 \in X(T_1|x_0, u_0(\cdot|x_0))\}$ допустима. Тогда оптимальная начальная программа $u_0^0(\cdot|x_0)$ на промежутке Δ_0 существует и является решением следующей минимаксной задачи

$$V(\pi_1^0) = \min_{u_0(\cdot)\in U_0} \max_{w_0(\cdot)\in W_0} \Big\{ \sum_{t\in\Delta_0} (||Qx(t)||_\infty + ||Ru_0(t)||_\infty) + J_1(x(T_1)) \Big\}, \tag{5}$$

при условиях

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu_0(t) + Mw_0(t),\quad x(0) = x_0,\quad u_0(t) \in U_0,\quad t \in \Delta_0,$$

$$x(T_1) \in X_1 \;\; \forall\, w_0(\cdot) \in W_0.$$

Определение 2. *Стратегия управления (3) оптимальна, если* $u_0^0(\cdot|x_0)$ *— решение задачи (5),* $u_1^0(\cdot|x_1)$ *— решения задач (4) для состояний* $x_1 \in X(T_1|x_0, u_0^0(\cdot|x_0))$.

Для начала процесса управления необходимо знать лишь оптимальную начальную программу $u_0^0(\cdot|x_0)$. Оптимальные гарантирующие программы $u_1^0(\cdot|x_1)$ для промежутка Δ_1 заранее не строятся. В момент T_1, после измерения $x(T_1)$, вычисляется лишь одна из них — $u_1^0(\cdot|x(T_1))$. Поэтому цель дальнейшего изложения — эффективное вычисление оптимальной начальной программы.

3. Построение оптимальной начальной программы и алгоритм управления по прогнозирующей модели

Задачу (5) запишем в эквивалентном виде

$$V(\pi_1^0) = \min_{u_0, \alpha} \max_{w_0} \left\{ \sum_{t \in \Delta_0} (||Qx(t)||_\infty + ||Ru_0(t)||_\infty) + \alpha \right\}, \tag{6}$$

при условиях

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu_0(t) + Mw_0(t), \quad x(0) = x_0, \quad u_0(t) \in U_0, \quad t \in \Delta_0,$$

$$x(T_1) \in X_1(\alpha) = \{x_1 \in X_1 : J_1(x_1) \leqslant \alpha\} \ \ \forall \ w(\cdot) \in W_0.$$

Центральный результат настоящего исследования — простое описание множества $X_1(\alpha)$, позволяющее свести задачу (6) к задаче линейного программирования.

Множество $X_1(\alpha)$ для дискретной системы (1) — многогранник. Пусть $p_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, m_1$, $||p_i|| = 1$, — нормали к граням $X_1(\alpha)$ (или граням аппроксимирующего его более простого многогранника, см. [10]) и пусть

$$g_{p_i}(\alpha) = \max_{x_1 \in X_1(\alpha)} p_i' x_1. \tag{7}$$

Легко установить, что задача (7) — задача линейного программирования, зависящая от параметра α. Тогда функция $g_{p_i}(\alpha)$ — вогнутая, кусочно-линейная. Для нее с использованием результатов параметрического линейного программирования [11] может быть найдено разбиение отрезка $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ допустимых значений параметра на области линейности функции $g_{p_i}(\alpha)$. Далее будем считать, что указанное разбиение найдено для всех p_i, $i = 1, \dots, m_1$, в результате чего построено обобщающее разбиение $\alpha_{\min} = \alpha^1 < \ldots < \alpha^{K+1} = \alpha_{\max}$ и найдены значения $q_i^k = \frac{dg_{p_i}(\alpha^k + 0)}{d\alpha}$, $i = 1, \dots, m_1$, $k = 1, \dots, K$, причем для каждого i имеют место неравенства $q_i^1 > q_i^2 > \ldots > q_i^{K_i} \geqslant 0$.

Пусть $Q_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times K}$ — матрица, элементами которой являются найденные q_i^k, $P_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ — матрица, строками которой являются p_i, $i = 1, \dots, m_1$, $g_1 = (g_{p_i}(\alpha_{\min}),\ i = 1, \dots, m_1)$. Тогда

$$X_1(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : P_1 x \leqslant g_1 + Q_1 \omega\},$$

где вектор $\omega \in \mathbb{R}^K$ построен по правилам: $\omega_k = \alpha^{k+1} - \alpha^k$, $k = 1, \dots, K(\alpha) - 1$; $\omega_{K(\alpha)} = \alpha - \alpha^{K(\alpha)}$; $\omega_k = 0$, $k = K(\alpha) + 1, \dots, K$; $K(\alpha) : \alpha \in [\alpha^{K(\alpha)}, \alpha^{K(\alpha)+1}[$.

Теперь, выбирая ω оптимальным образом, получим задачу

$$V(\pi_1^0) = \min_{u_0,\omega} \max_{w_0} \left\{ \sum_{t\in\Delta_0} (||Qx(t)||_\infty + ||Ru_0(t)||_\infty) + \sum\nolimits_{k=1}^{K} \omega_k \right\} + \alpha^1, \tag{8}$$

при условиях

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu_0(t) + Mw_0(t), \quad x(0) = x_0, \quad u_0(t) \in U_0, \quad t \in \Delta_0,$$

$$P_1 x(T_1) - Q_1\omega \leqslant g_1 \ \ \forall\, w(\cdot) \in W_0, \quad 0 \leqslant \omega_k \leqslant \alpha^{k+1} - \alpha^k, \quad k = 1, \dots, K,$$

и для эффективного численного решения может быть далее сведена к задаче линейного программирования (см. например, подходы в [8,10]).

Отметим, что процедура преобразования задачи (5) к виду (8) (построение матриц P_1, Q_1, значений α^k) может оказаться достаточно трудоемкой. В то же время этот этап является подготовительным и не зависит от начального значения x_0. Это означает, что в алгоритме управления по прогнозирующей модели (MPC, см. введение) трудоемкость решения зависит только от трудоемкости решения задачи (8).

Приведем упомянутый алгоритм MPC на основе оптимальных стратегий π_1^0. Прогнозирующая задача оптимального управления — это задача (5) (эквивалентная ей (8)), в которой начальное состояние совпадает с текущим (в момент времени τ) состоянием объекта управления $x^*(\tau)$, т.е. начальное условие $x(0) = x_0$ заменяется на $x(0) = x^*(\tau)$. Оптимальная начальная программа прогнозирующей задачи, чтобы подчеркнуть момент τ, в который она получена, обозначается через $u_0^0(t|\tau)$, $t \in \Delta_0$.

Алгоритм MPC заключается в следующем:

1. в момент времени τ измерить $x^*(\tau)$ и найти $u_0^0(t|\tau)$, $t \in \Delta_0$;
2. применить к объекту управляющее воздействие $u_{MPC}(\tau) = u_0^0(0|\tau)$;
3. перейти к следующему моменту ($\tau := \tau + 1$) и вернуться к шагу 1 алгоритма.

Численные эксперименты демонстрируют сравнимую трудоемкость построения оптимальных стратегий и оптимальных гарантирующих программам, при этом стратегии позволяют улучшить качество процесса управления.

Список литературы

1. Witsenhausen H. A minimax control problem for sampled linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1968. Vol. 13, No. 1. P. 5-21.
2. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
3. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.
4. Rawlings J.B., Mayne D.Q. Model Predictive Control: Theory and Design. Madison: Nob Hill Publishing, 2009. 576 p.
5. Scokaert P.O.M., Mayne D.Q. Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems // IEEE Transactions on Automatic control. 1998. Vol. 43, No. 8. P. 1136-1142.
6. Goulart P.J, Kerrigan E.C., Maciejowski J.M. Optimization over state feedback policies for robust control with constraints // Automatica. 2006. Vol. 42, No. 4. P. 523-533.
7. Bemporad A., Borrelli F., Morari M. Min-max control of constrained uncertain discrete-time linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. Vol. 48, No. 9. P. 1600-1606.
8. Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью // Журнал вычислительной математики и математеческой физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 265-286.

9. Kostyukova O., Kostina E. Robust optimal feedback for terminal linear-quadratic control problems under disturbances // Mathematical programming. 2006. Vol. 107, No. 1-2. P. 131-153.
10. Дмитрук Н.М. Оптимальная стратегия с одним моментом замыкания в линейной задаче оптимального гарантированного управления // Журнал вычислительной математики и математеческой физики. 2018. Т. 58, № 5. С. 664-681.
11. Gal T. Postoptimal analyses, parametric programming and related topics. Berlin: De Gruyter, 1995.