УДК 62.50

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРЕЖДАЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧЕ ПРОТИВОУДАРНОЙ ИЗОЛЯЦИИ

В.А. Корнеев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Россия, 119526, Москва, проспект Вернадского, 101, к. 1

E-mail: korneev@ipmnet.ru

Ключевые слова: противоударная изоляция, оптимальное управление.

Аннотация: Рассмотрена задача о построении гарантирующего упреждающего управления для противоударного изолятора, защищающего объект на подвижном основании от ударов, которым может подвергаться основание. Форма ударного воздействия неизвестна, его длительность задана, и ускорение основания описывается знакопостоянной функцией времени, интеграл от которой по времени также задан. Упреждающее управление действует между основанием и защищаемым объектом, имеет одно переключение, ограничено по величине, а абсолютное ускорение основания может превышать эту величину лишь на одном интервале времени. Минимизируемым критерием качества выбрано максимальное смещение объекта относительно основания. Получены оптимальное и близкое к оптимальному решения.

1. Механическая система.

Пусть механическая система состоит из основания и объекта, соединенного с основанием посредством противоударного изолятора – устройства, генерирующего управляющую силу f между основанием и объектом и предназначенного для защиты объекта при ударном воздействии на основание. Движения основания и объекта предполагаются поступательными вдоль одной прямой. Обозначим: z – смещение основания относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета, x – смещение объекта относительно основания, m – масса объекта. Ударное воздействие на основание моделируется его ускорением $\ddot{z}$ – функцией времени, некоторые характеристики которой предполагаются известными.

Движение объекта относительно основания описывается уравнением

$$\ddot{x} + u = v(t), \quad u = f/m, \quad v = -\ddot{z}. \tag{1}$$

Далее полагаем, что сила f удовлетворяет ограничению $|f| \leqslant F_0$, где F_0 – заданная величина, тогда величина u удовлетворяет неравенству

$$|u| \leqslant u_0, \quad u_0 = F_0/m.$$

Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ основание и объект покоятся в положениях, отвечающих нулевым значениям координат x и z:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0. \tag{2}$$

В качестве допустимых управлений будем рассматривать кусочно-непрерывные функции $u(t)$, удовлетворяющие ограничению $|u(t)| \leqslant u_0$.

Предполагается, что возмущение $v(t)$ имеет вид

$$v(t) = V(t - t_0), \;\; t_0 \geqslant 0, \tag{3}$$

где кусочно-непрерывная функция $V(\xi)$ определена для всех вещественных ξ, причем $V(\xi) \equiv 0$ для $\xi < 0$, а $t_0 \geqslant 0$ – некоторый момент времени, который может быть задан или подлежать определению. Таким образом, возмущение V начинает действовать на основание спустя время t_0 после включения системы противоударной изоляции (упреждающее управление).

Будем предполагать, что 1) возмущение действует только в одном направлении и не меняет знака ($V(\xi) \geqslant 0$), 2) имеет конечную длительность T ($V(\xi) \equiv 0$, если $\xi > T$) и 3) только на одном интервале, $t_1 < \xi < t_2$, величина абсолютного ускорения $V(\xi)$ основания превышает верхнюю границу u_0 абсолютного ускорения защищаемого объекта:

$$V(\xi) < u_0 \;\text{ для }\; 0 \leqslant \xi < t_1 \;\text{ и }\; t_2 < \xi \leqslant T; \quad V(\xi) > u_0 \;\text{ для }\; t_1 < \xi < t_2.$$

Один или оба из интервалов $0 \leqslant \xi < t_1$ и $t_2 < \xi \leqslant T$ могут быть пустыми, если $V(0) > u_0$ или $V(T) > u_0$. В случае, когда $V(\xi)$, $0 \leqslant \xi \leqslant T$, предполагается известной функцией и $V(\xi) \leqslant u_0$, оптимальное управление определяется тождеством $u(t) \equiv V(t - t_0)$ и обеспечивает тождественно равное нулю смещение объекта по отношению к основанию. Базовыми характеристиками ударного воздействия являются его длительность T и интеграл v_0

$$v_0 = \int_0^T V(\xi) d\xi,$$

характеризующий величину скорости, приобретенной (или потерянной) основанием в результате удара. Параметры T, v_0 предполагаются известными и заданными. Такой класс возмущений обозначим V_T.

2. Критерий качества и задачи оптимизации

Будем считать, что возмущение $V(\xi)$ неизвестно, но известно множество $\Omega \subseteq V_\infty$, которому могут принадлежать возможные возмущения. Качество изоляции при заданных управлении $u(t)$ и времени упреждения t_0 будем оценивать функционалом J, характеризующим максимальную величину смещения объекта относительно основания при наихудшем возмущении:

$$J(u,\, t_0) = \max_{V \in \Omega} \max_{t \in [0,\,\infty)} |x(t; u, V, t_0)|, \tag{4}$$

где $x(t; u, V, t_0)$ – решение уравнения (1) с начальными условиями (2) для заданных $u(t)$, $V(\xi)$ и t_0. Величину J желательно минимизировать выбором оптимального закона управления и времени упреждения. Поскольку условия информированности управляющей стороны о внешнем возмущении могут быть различными, то и задачи оптимального управления должны быть сформулированы по-разному.

Задача 1. *Для системы (1) с начальными условиями (2) найти допустимое управление u_* и время упреждения t_0^*, которые минимизируют величину (4):*

$$J(u_*,\, t_0^*) = \min_{u \in U,\, t_0} J(u,\, t_0),$$

где U – множество законов управления $u(t)$, среди которых ищется оптимум.

Это задача о гарантирующем оптимальном упреждающем управлении противоударным изолятором, защищающим объект от ударных воздействий из множества Ω. Она обобщает задачу, рассматриваемую в [1–3] для заданного возмущения. В дальнейшем ограничимся параметрическим семейством допустимых релейных управлений $u_\tau(t)$ с переключением с $-u_0$ на u_0 в момент времени τ и с u_0 на 0 в момент времени $v_0/u_0 + 2\tau$, т.е. примем $U = \{u_\tau\}$, где

$$u_\tau(t) = \begin{cases} -u_0, & 0 \leqslant t < \tau, \\ +u_0, & \tau \leqslant t \leqslant T_c, \\ 0, & t > T_c, \end{cases} \qquad T_c = \frac{v_0}{u_0} + 2\tau. \tag{5}$$

Длина отрезков управления в (5) выбрана из условия $\dot{x} \to 0$ при $t \to +\infty$. Обозначим через $x(t; u, V, t^0)$ решение уравнения (1) с начальными условиями (2) при $v(t)$ вида (3) и управлении вида (5).

Задача 2. *Для заданного допустимого управления $u(t)$ найти время упреждения t_0^*, минимизирующее величину (4):*

$$J(u,\, t_0^*) = \min_{t_0} J(u,\, t_0).$$

Эту задачу можно трактовать как задачу 1, в которой множество допустимых законов управления U состоит из одного элемента. Решение задачи 2 дает возможность улучшать качество противоударной защиты путем изменения только времени упреждения при заданном программном законе управления $u(t)$.

3. Построение гарантирующего управления.

Вычисление функционала (4) предполагает определение наихудшего возмущения $V \in \Omega$, которое максимизирует максимум модуля отклонения защищаемого объекта относительно основания $(\max_t |x(t; u, V, t_0)|)$ при заданных $u(t)$ и t_0.

Лемма. *[5]. Среди возмущений $V \in V_T$ наихудшее возмущение есть либо $V(\xi) = v_0\delta(\xi)$, либо $V(\xi) = v_0\delta(\xi - T)$. Иными словами, наихудшее возмущение есть мгновенный удар интенсивности v_0, подаваемый в начальный или в конечный момент допустимого интервала возмущения.*

Согласно этой лемме, для нахождения наихудшего возмущения при заданных $u(t)$ и t_0 надо решить дифференциальное уравнение (1) с начальными условиями (2) при $v(t) = v_0\delta(t - t_0)$ и $v(t) = v_0\delta(t - t_0 - T)$, для каждого из решений вычислить

$\max_t|x(t)|$, сравнить получившиеся величины и выбрать возмущение, отвечающее большему значению.

Введем безразмерные переменные

$$x' = \frac{u_0}{v_0^2}\,x,\;\; t' = \frac{u_0}{v_0}\,t,\;\; t_0' = \frac{u_0}{v_0}\,t_0,\;\; T' = \frac{u_0}{v_0}\,T,\;\; \tau' = \frac{u_0}{v_0}\,\tau,$$
$$v'(t') = \frac{1}{v_0}\,v\left(\frac{v_0}{u_0}\,t'\right),\;\; u' = \frac{u}{u_0},\;\; J' = \frac{u_0}{v_0^2}\,J.$$

Далее будем использовать безразмерные переменные, опуская штрихи. В безразмерных единицах параметры u_0 и v_0 равны единице.

Мгновенный удар. Мгновенный удар моделируется дельта-функцией Дирака и в размерных переменных описывается соотношением $V(\xi) = v_0\,\delta(\xi)$, а в безразмерных переменных задается формулой $V(\xi) = \delta(\xi)$. Для этого возмущения задача 1 была решена в [4]. Оптимальное управление, оптимальное время упреждения и значение критерия качества для этого случая в безразмерных переменных определяются соотношениями

$$u_\delta(t) = \begin{cases} -1,\; 0 \leqslant t \leqslant t_1^\delta = 1/4, \\ 1,\; t_1^\delta < t \leqslant t_2^\delta = 3/2, \\ 0,\; t > t_2^\delta = 3/2, \end{cases} \qquad t_0^\delta = 1, \quad J_\delta = 1/16. \tag{6}$$

Решение Задачи 2 для дельта-управления. Использование Леммы и дальнейшая оптимизация момента упреждения позволили получить решение Задачи 2, в которой в качестве управляющего закона было использовано управление u_δ из (6). Момент упреждения задается формулой

$$t_0 = \begin{cases} \sqrt{1/4 + 2T + 2} - 1/2 - T,\;\; T \leqslant 7/8, \\ 17/16 - T/2,\;\; 7/8 < T \leqslant 17/8, \\ 0,\;\; T > 17/8. \end{cases}$$

а значение функционала для задачи 2 имеет следующий вид

$$J_2 = \begin{cases} 25/16 - \sqrt{1/4 + 2T + 2} + T,\;\; T \leqslant 7/8, \\ T/2,\;\; 7/8 < T \leqslant 17/8, \\ T - 17/16,\;\; T > 17/8. \end{cases}$$

Решение Задачи 1. Для класса управлений $U = \{u_\tau\}$ получено также решение Задачи 1. Оптимальное управление определяется формулой (5) с значением параметра τ

$$\tau = \begin{cases} T/2 + 1/4 & \text{при } \; T < 1/2, \\ 1/2 & \text{при } \; 1/2 < T \leqslant 7/2, \\ \sqrt{(1+T)/2} - 1 & \text{при } \; T > 7/2. \end{cases}$$

Значение функционала и момент упреждения определяются формулами

$$J_1 = \begin{cases} (T/2 + 1/4)^2 & \text{при } \; T \leqslant 1/2, \\ T/2 & \text{при } \; 1/2 < T, \end{cases}$$

$$t_0 = \begin{cases} T+1 & \text{при } T < 1/2, \\ 7/4 - T/2 & \text{при } 1/2 < T \leqslant 7/2, \\ 0 & \text{при } T > 7/2. \end{cases}$$

Заметим, что приведенное решение Задачи 1 при $T > 1/2$ неединственно. Значение функционала $J = T/2$ для этого случая обеспечивается моментом переключения τ и моментом упреждения t_0, удовлетворяющим соотношениям

$$\max\{\sqrt{(1+T)/2} - 1, 0\} \leqslant \tau \leqslant \sqrt{T/2},$$
$$t_0 = 1/2 + \tau^2 + 2\tau - T/2.$$

Зависимости величин J_1 и J_2 от $1/T$ изображены на рис. 1.

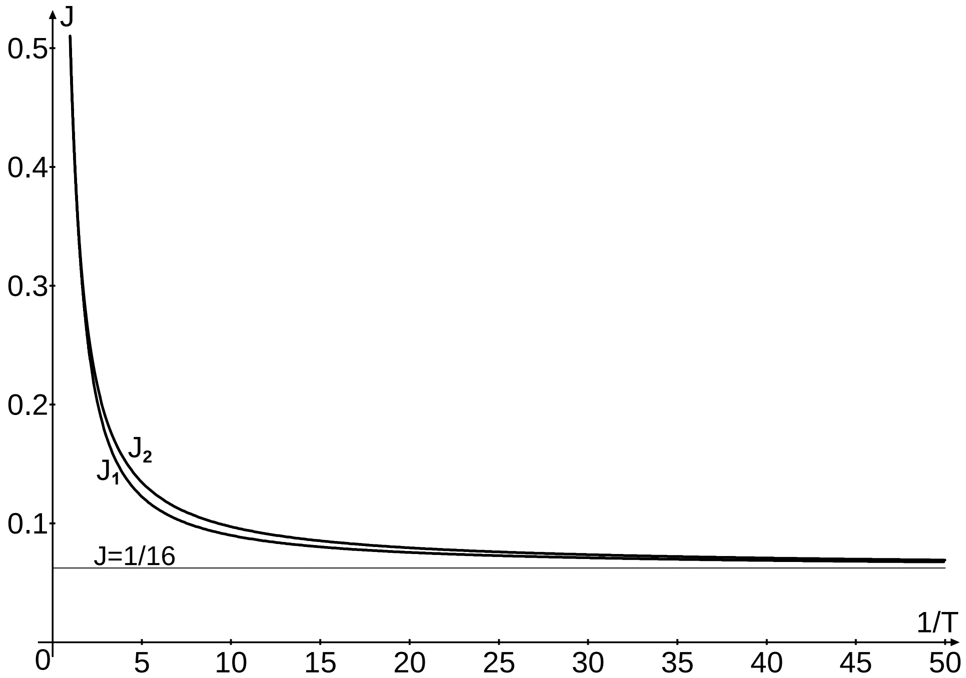

Рис. 1.

Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А17-117021310387-0 при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-01-00538-а и 17-08-00742-а).

Список литературы

1. Гурецкий В.В. Об одной задаче оптимального управления // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 1. С. 159-162.
2. Гурецкий В.В. О задаче минимизации максимального смещения // Труды ЛПИ. Механика и процессы управления. 1969. № 307. С. 11-21.
3. Sevin E., Pilkey W. Optimum Shock and Vibration Isolation. Washington, DC: Shock and Vibration Information Analysis Center, 1971. 162 p.
4. Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W.D. Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 2001. 436 p.
5. Болотник Н.Н., Корнеев В.А. Гарантирующее упреждающее управление в задаче противоударной изоляции // Доклады РАН. 2018. Т. 481, № 4. С. 381-385.