УДК 517.977

ПОСТРОЕНИЕ ПРОГРАММНОГО И ПОЗИЦИОННОГО РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Н.С. Павленок

Белорусский государственный университет

Беларусь, 220050, Минск, пр. Независимости, 4

E-mail: paulianok@bsu.by

Ключевые слова: линейная система управления, квадратичный критерий качества, геометрические ограничения на управление, позиционное решение, особые режимы, вычислительный алгоритм.

Аннотация: Исследуется линейно-квадратичная задача оптимального управления с геометрическими ограничениями на управляющие воздействия. Решение таких задач может содержать особые участки и участки с режимами Фуллера, на которых происходят бесконечно частые переключения управляющих воздействий. Предложенный метод вычисления оптимальной программы и базирующийся на нем метод построения позиционного решения позволяют выделять особые участки и строить с любой точностью реализуемые аппроксимации нереализуемых технически режимов Фуллера. Результаты иллюстрируются на различных численных примерах.

В теории оптимального управления линейно-квадратичные задачи [1] представляют непосредственное обобщение линейных задач оптимального управления. Их значение определяется как тем, что многие прикладные задачи моделируются адекватно в форме линейно-квадратичных задач, так и тем, что они доставляют эффективные аппроксимации при решении общих нелинейных задач. В настоящее время качественная теория (в отличие от конструктивной теории) линейно-квадратичных задач оптимального управления разработана достаточно полно. Это касается прежде всего методов построения позиционных решений. Исключение составляет известная и всесторонне исследованная линейно-квадратичная задача Летова-Калмана.

С конструктивной точки зрения линейно-квадратичные задачи оптимального управления заметно сложнее линейных. Их решения часто содержат (кроме релейных) особые участки [2] и участки с режимами Фуллера [3], на которых происходят бесконечно частые переключения управляющих воздействий. Эффективных методов построения позиционных решений для подобных задач пока не создано. Существующие методы построения программных решений линейно-квадратичных задач [4] трудно использовать для реализации позиционных решений. В данной работе при построении позиционных решений применяется численный метод построения программных решений линейно-квадратичной задачи оптимального управления [5, 6], основанный на специальной кусочно-линейной аппроксимации исходной задачи. При этом, учитывая возможности практической реализации результатов теории оптимального управления, на неособых участках используются дискретные (а не измеримые или кусочно-непрерывные) управляющие воздействия. Кроме того, под решением задачи понимается получение не теоретических результатов, которые невозможно реализовать с помощью существующих технических средств, а таких реализуемых результатов, которые сколь угодно точно аппроксимируют теоретические результаты по значениям критерия качества.

Рассматривается линейно-квадратичная задача оптимального управления, в которой критерий качества не содержит членов с управляющими воздействиями, и на последние наложены геометрические ограничения:

$$(1) \qquad \int\limits_0^{t^*} \sum_{i=1}^{k} d_i x_i^2(t)dt \to \min,\ \dot{x} = Ax + bu,\ x(0) = x_0,\ |u(t)| \leqslant 1,\ t \in T.$$

Здесь $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы управления в момент t; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — заданное начальное состояние системы управления; $u = u(t)$ — значение управляющего воздействия; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$; $d_i \in \mathbb{R}$, $d_i > 0$, $i = \overline{1,k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$; $T = [0, t^*]$.

Функция $u(t)$, $t \in T$, называется а) дискретной (с периодом квантования h, $h = t^*/N$, N – натуральное число), если $u(t) = u(\tau)$, $t \in [\tau, \ \tau + h[$, $\tau \in T_h = \{0, h, ..., t^* - h\}$; б) дискретно-особой, если она дискретна на неособых участках и непрерывна на особых, при этом границами особых участков являются моменты $\tau \in T_h$.

Дискретно-особое управляющее воздействие $u(t)$, $t \in T$, называется программой, если оно удовлетворяет ограничениям: $|u(t)| \leqslant 1$, $t \in T$. Программа $u^0(t)$, $t \in T$, оптимальна, если на соответствующей ей (оптимальной) траектории $x^0(t)$, $t \in T$, критерий качества задачи (1) достигает минимального значения.

В классе измеримых управляющих воздействий решение задачи (1) может содержать, кроме релейно-особых, участки с нереализуемыми технически режимами Фуллера, на которых происходят бесконечно частые переключения управляющих воздействий. Поэтому в работе каждый режим Фуллера заменяется на дискретно-особое управляющее воздействие, которое по значению критерия качества (при соответствующем выборе параметров метода) сколь угодно мало отличается от оптимального управляющего воздействия с режимом Фуллера.

Оптимальные программы позволяют выявлять потенциальные возможности систем управления. Однако на практике для управления физическими объектами нужны, как правило, оптимальные обратные связи, которые способны парировать действующие на систему управления неизбежные возмущения. Для определения оптимальной обратной связи задача (1) погружается в семейство задач

$$(2) \qquad \int\limits_\tau^{t^*} \sum_{i=1}^{k} d_i x_i^2(t)dt \to \min, \dot{x} = Ax + bu, x(\tau) = z, |u(t)| \leqslant 1, t \in T(\tau),$$

зависящее от параметров $\tau \in T_h$ и $z \in \mathbb{R}^n$; $T(\tau) = [\tau, t^*]$.

Пусть $u^0(t|\tau, z)$, $t \in T(\tau)$, – оптимальная (дискретно-особая) программа задачи (2) для позиции (τ, z). Функция

$$(3) \qquad u^0(\tau, z) = (u^0(t|\tau, z),\ t \in [\tau, \tau + h[),\ \tau \in T_h,\ z \in \mathbb{R}^n,$$

называется оптимальной (дискретно-особой) обратной связью, а ее построение – синтезом оптимальной системы (по принципу замкнутого контура).

Поскольку построение оптимальной обратной связи в явной форме в данном случае представляет сложную задачу, то вводится понятие реализации оптимальной обратной связи, ориентированное на вычисление текущих значений (3) в реальном времени по ходу каждого конкретного процесса управления:

$$u^*(t) = u^0(t, x^*(t)) = u^0(t|\tau, x^*(\tau)),\ t \in [\tau, \tau + h[,\ \tau \in T_h, \tag{4}$$

где $x^*(t), t \in T,$ – траектория системы

$$\dot{x}^*(t) \equiv Ax^*(t) + bu^0(t, x^*(t)) + w^*(t),\ t \in T;\ x(0) = x_0,$$

описывающей поведение физического прототипа математической модели (1); $w^*(t)$, $t \in T$, – реализующееся в процессе управления неизвестное возмущение (ограниченная кусочно-непрерывная функция).

Согласно (4), для управления конкретным процессом не нужно знать оптимальную обратную связь (3) целиком (во всей области ее определения), нужны лишь ее значения вдоль изолированной траектории $x^*(t), t \in T$.

Ставится задаяа – описать метод построения функции (4) по принципу оптимального управления в реальном времени, при котором обратная связь (3) не строится, а необходимые для управления на текущем периоде $[\tau + s(\tau), \tau + h + s(\tau + h)[$ значения $u^*(t)$ ее реализации (4) вычисляются по ходу процесса управления за время $s(\tau)$, не превосходящее h.

В предлагаемом подходе существенную роль играет метод построения оптимальной программы до начала процесса управления и коррекция оптимальных программ в процессе управления. Суть метода состоит в следующем. Исходная линейно-квадратичная задача оптимального управления аппроксимируется кусочно-линейной задачей оптимального управления, которая решается методом последовательных линеаризаций. Для получаемых специфических линейных задач оптимального управления с фазовыми ограничениями разработан быстрый двойственный алгоритм вычисления оптимальных программ [5,6]. В зависимости от результата решения кусочно-линейной задачи строится (с помощью процедуры доводки) оптимальное релейное управляющее воздействие для исходной задачи или производится врезка особого участка. Предложен специальный тест на наличие режима Фуллера. При отсутствии последнего строится оптимальное релейно-особое управляющее воздействие. Каждая процедура базируется на методе Ньютона решения нелинейных уравнений.

Все полученные результаты подробно иллюстрируются на численных примерах.

Список литературы

1. Брайсон А., Ю-Ши Хо Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление. М.: Мир, 1972.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука. 1973.
3. Фуллер А.Т. Оптимизация релейных систем регулирования по различным критериям качества // Труды I Междунар. конгресса Междунар. федерации по автоматич. управлению (IFAC). Теория дискретных, оптимальных и самонастраивающихся систем. М.: Изд-во АН СССР. 1961. С. 584-605.
4. Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит. 2000.

5. Gabasov R., Kirillova F.M., Paulianok N.S. Optimal control of linear systems on quadratic performance index // Appl. Comput. Math. 2008. Vol. 7, No 1. P. 4-20.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Павленок Н.С. Построение программных и позиционных решений линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Журнал вычислит. математики и матем. физики. 2008. Т. 48. № 10. С. 1401-1432.