УДК 517.977; 519.7

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

С.С. Постнов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: postnov.sergey@inbox.ru

Е.А. Постнова
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: postnova@ipu.ru

Ключевые слова: оптимальное управление, метод моментов, системы дробного порядка, дробная производная.

Аннотация: Для систем с сосредоточенными параметрами, поведение которых описывается линейными уравнениями дробного порядка, исследовано два типа задач оптимального управления: поиск управления с минимальной нормой и задача быстродействия. Исследование проводится методом моментов, а допустимые управления считаются интегрируемыми с некоторой степенью $p > 1$. Получены условия, определяющие корректность и разрешимость l-проблемы моментов, к которой сведены исследуемые задачи. Для ряда систем построено точное аналитическое решение задач оптимального управления и проанализированы его свойства.

1. Введение

В современной теории оптимального управления известно уже довольно много работ, содержащих постановку и результаты исследования различных задач оптимального управления для систем дробного порядка. Например, описаны применения вариационного подхода к поиску оптимального управления, задаваемого непрерывной функцией [1], и формулировки аналога принципа максимума Понтрягина [2]. В работах [3, 4] для исследования таких систем был применен метод моментов. При этом, как правило, дробная производная в уравнениях, определяющих динамику рассматриваемых систем, понимается в смысле Капуто или Римана-Лиувилля. В то же время, характерной особенностью дробного исчисления является неединственность определений дробных операторов: на сегодня известно несколько десятков определений дробной производной и дробного интеграла, причем из года в год продолжают появляться новые определения. Решения уравнений дробного порядка, одинаковых по форме, но отличающихся способом задания оператора дробного дифференцирования, совпадают далеко не всегда. Это же справедливо и для решений задач оптимального управления.

В настоящей работе приводятся результаты развития исследований, начатых в работах [3, 4], и применения метода моментов к задачам оптимального управления системами дробного порядка, для описания которых используются операторы Адамара, Хильфера и Эрдейи-Кобера. Также получено обобщение результатов об оптимальном управлении двойным интегратором дробного порядка.

2. Постановка задач оптимального управления и представление их в форме l-проблемы моментов

Пусть вектор-функции $\mathrm{q}(t) = (q_1(t),\ \ldots,\ q_N(t))$ и $\mathrm{u}(t) = (u_1(t),\ \ldots,\ u_N(t))$, описывающие состояние системы и управление соответственно, определены на полуинтервале $t \in (t_0, T]$. Будем рассматривать многомерные линейные системы дробного порядка с сосредоточенными параметрами, динамика которых определяется уравнениями следующего вида:

(1) $$ {}_{t_0}D_t^{\sigma_i} q_i(t) = f_i(t, \mathrm{q}(t), \mathrm{u}(t)), $$

где ${}_{t_0}D_t^{\sigma_i}$ – левосторонний оператор дробного дифференцирования, $\sigma_i \in (0,1]$, $t \in (t_0, T]$, $f_i(t)$ – некоторые известные функции, линейные по управлению, $i = 1, \ldots, N$. Показатель дробного дифференцирования σ_i может быть составным (подразумевать набор из двух или трех чисел для определений Хильфера и Эрдейи-Кобера соответственно), тогда считается, что каждая из его компонент принадлежит полуинтервалу $(0,1]$. Рассматривается случай, когда управление $\mathrm{u}(t)$ принадлежит пространству $L_p(t_0, T]$, $p > 1$.

Для системы (1) зададим нелокальные начальные условия в виде:

(2) $$ \lim_{t \to t_0+} [{}_{t_0}I_t^{\sigma_i} q_i(t)] = s_i^0(t_0), i = 1, \ldots, N, $$

где ${}_{t_0}I_t^{\sigma_i}$ – оператор дробного интегрирования. Предполагается, что начальные условия могут параметрически зависеть от выбора начального момента t_0. Конечные условия для системы (1) также предполагаются зависящими параметрически от выбора конечного момента T, но задаются в локальном виде:

(3) $$ q_i(T) = q_i^T(T), i = 1, \ldots, N. $$

Поставим следующие две задачи оптимального управления.

Задача 1 (Задача А). *Найти управление* $\mathrm{u}(t)$, *$t \in (t_0, T]$, такое, чтобы система (1) перешла из заданного начального состояния (2) в заданное конечное состояние (3) и при этом норма управления в пространстве $L_p(t_0, T]$, $p > 1$ достигла минимального значения, когда значения t_0 и T заданы.*

Задача 2 (Задача Б). *Найти управление* $\mathrm{u}(t) \in L_p(t_0, T]$, *$t \in (t_0, T]$, такое, чтобы система (1) перешла из заданного начального состояния (2) в заданное конечное состояние (3) и при этом время управления $T - t_0$ было минимальным при условии $\|\mathrm{u}\| \leq l$, $l > 0$, где l задано.*

Поставленные задачи А и Б, используя интегральное представление для решения системы (1) (аналогично работам [3, 4]), можно свести к следующей l-проблеме моментов.

Задача 3 (l-проблема моментов)**.** *Пусть заданы система функций $g_i(t) \in L_{p'}(t_0, T]$, $i = 1, \dots, N$, набор действительных чисел (называемых моментами) c_i, $i = 1, \dots, N$, $\sum_{i=1}^{N} c_i^2 \neq 0$ и положительное действительное число $l > 0$. Необходимо найти функцию $u(t) \in L_p(t_0, T]$ определенную в пространстве, сопряженном к пространству $L_{p'}(t_0, T]$, для которой выполнялись бы следующие условия:*

$$\int_{t_0}^{T} g_i(\tau)\mathrm{u}(\tau)d\tau = c_i, \tag{4}$$

$$\|\mathrm{u}\| \leq l. \tag{5}$$

3. Исследование l-проблемы моментов для линейных систем с сосредоточенными параметрами

3.1. Одномерная линейная система

Рассмотрим систему:

$$ {}_{t_0}D_t^{\sigma} q(t) = aq(t) + bu(t), \tag{6}$$

где a и b – коэффициенты (вообще говоря, могут быть функциями времени), $b \neq 0$.

Для системы (6) в случаях, когда оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Хильфера [5] или Адамара [6], существует точное решение, на основании которого можно получить условия корректности и разрешимости соответствующей l-проблемы моментов [7, 8].

Определение 1. *Будем называть l-проблему моментов (3), (5) корректной, если в пространстве $L_{p'}(t_0, T]$, $p' > 1$ определена норма функций $g_i(t)$.*

Теорема 1. *Пусть задана система (6), в которой оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Хильфера или Адамара, а коэффициенты a и b не зависят от времени. l-Проблема моментов (3), (5) для такой системы будет корректна и разрешима, если выполнено следующее условие:*

$$\sigma > \frac{1}{p}. \tag{7}$$

Доказательство. Может быть получено непосредственным вычислением нормы функции $g(t)$ в пространстве $L_{p'}(t_0, T]$, $p' > 1$ для системы (6).

Пусть теперь оператор дробного дифференцирования в уравнении (6) понимается в смысле Эрдейи-Кобера [6], а показатель σ уже обозначает набор из трех чисел (α, β, δ).

Теорема 2. *Пусть задана система (6), в которой оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Эрдейи-Кобера. l-Проблема моментов (3), (5) для такой системы будет корректна и разрешима в следующих случаях:*

- *для $a = 0$, $b = 1$ при выполнении условий*

$$\delta > \frac{1}{p}, \quad \beta(\alpha + 1) > \frac{1}{p}; \tag{8}$$

- *для $a = \lambda t^{\beta\delta}$, $b = t^{\beta\delta}$ $(\lambda \neq 0)$ при выполнении условий*

$$\delta > \frac{1}{p}, \quad \beta(\alpha + \delta + 1) > \frac{1}{p}. \tag{9}$$

Доказательство. Может быть получено непосредственным вычислением нормы функции $g(t)$ в пространстве $L_{p'}(t_0, T]$, $p' > 1$ для системы (6).

Если l-проблема моментов является корректной и разрешимой, то для нее может быть построено аналитическое решение, на основе которого строится решение поставленных выше задач А и Б. В настоящей работе приводятся эти решения и исследуются их свойства. В частности, рассматривается влияние выбора определения дробной производной на форму решения, зависимость нормы оптимального управления и минимального времени перехода в заданное состояние от показателей дробного дифференцирования.

3.2. Двойной интегратор

Будем рассматривать систему, представляющую собой цепочку связанных интеграторов или N-кратный интегратор:

$$\begin{aligned} {}_{t_0}D_t^{\sigma_1} q_1(t) &= q_2(t), \\ {}_{t_0}D_t^{\sigma_2} q_2(t) &= q_3(t), \\ &\dots, \\ {}_{t_0}D_t^{\sigma_N} q_N(t) &= u(t). \end{aligned} \tag{10}$$

Теорема 3. *Пусть задана система (10), в которой оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Хильфера или Адамара. l-Проблема моментов (3), (5) для такой системы будет корректна и разрешима, если выполнено следующее условие:*

$$\sigma_N > \frac{1}{p}. \tag{11}$$

Доказательство. Может быть получено непосредственным вычислением нормы функций $g_i(t)$ в пространстве $L_{p'}(t_0, T]$, $p' > 1$ для системы (10).

Популярным частным случаем системы (10) является двойной интегратор, представляющий собой систему (10) при $N = 2$. Ранее для двойного интегратора, где оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Капуто [3, 4], было показано, что в случае $u(t) \in L_\infty(t_0, T]$ решение l-проблемы моментов приводит к задаче минимизации функции одной переменной следующего вида:

$$F(\xi_2) = \left[A \left(\frac{c_1 \xi_2}{c_2 \xi_2 - 1} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \xi_2 + B \frac{c_2 \xi_2 - 1}{c_1} + C \xi_2 \right] \operatorname{sign}(\xi_2), \tag{12}$$

где коэффициенты A, B, C определяются величинами $\sigma_{1,2}$, t_0, T, а также начальными и конечными условиями. К функции такого же вида сводится решение l-проблемы моментов и в случаях, когда оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Хильфера или Адамара [7, 8]. В общем случае задача минимизации функции (12) не имеет явного решения. Более того, характер этой функции может меняться в зависимости от параметров так, что минимум будет достигаться или в стационарных точках или на границе некоторой подобласти области определения. Далее будем называть точки ξ_2 допустимыми, если в этих точках $F(\xi_2) > 0$ и $Im[F(\xi_2)] = 0$.

Теорема 4. *Для того, чтобы функция (12) имела минимум в некоторой допустимой точке ξ_2 необходимо выполнение следующих условий:*

$$c_2 \xi_2 \neq 1; \qquad \operatorname{Im} \left[\left(\frac{c_1 \xi_2}{c_2 \xi_2 - 1)} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \right] = 0. \tag{13}$$

Следствие 1. *Если отношение α_2/α_1 не является рациональным числом с нечетным знаменателем, то допустимыми точками минимума функции (12) могут быть только следующие точки:* $\xi_2 \in (0, 1/c_2)$ *при* $c_1 < 0$, $c_2 > 0$; $\xi_2 \in (1/c_2, 0)$ *при* $c_1 > 0$, $c_2 < 0$; $\xi_2 \in (-\infty, 0) \cup (1/c_2, +\infty)$ *при* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$; $\xi_2 \in (-\infty, 1/c_2) \cup (0, +\infty)$ *при* $c_1 < 0$, $c_2 < 0$;

Замечание 1. *Задача минимизации функции (12) может быть точно решена в нескольких частных случаях:* $c_2 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_1/\alpha_2 = 2^{\pm 1}$, $\alpha_1/\alpha_2 = 3^{\pm 1}$. *В случае* $c_2/c_1 << 1$ *методами теории возмущений может быть построено приближенное решение. В общем случае задача минимизации решается численно.*

Для двойного интегратора в работе представлены результаты решения l-проблемы моментов и исследования свойств этих решений в зависимости от выбора определения дробной производной и показателей дробного дифференцирования. В том числе, исследованы решения задач оптимального управления в случае, когда начальные и конечные условия параметрически зависят от начального и конечного моментов времени.

4. Заключение

Таким образом, в работе приведены результаты, касающиеся исследования задач оптимального управления системами дробного порядка с сосредоточенными параметрами с помощью метода моментов. Получены условия, при которых l-проблема моментов для таких систем является корректной и разрешимой. Изучены вопросы влияния выбора определения дробной производной на свойства решений задач оптимального управления, изучены зависимости этих свойств от параметров задачи.

Список литературы

1. Agrawal O.P. A General Formulation and Solution Scheme for Fractional Optimal Control Problems // Nonlin. Dyn. 2004. Vol. 38. P. 323-337.
2. Kamocki R. Pontryagin maximum principle for fractional ordinary optimal control problems // Math. Meth. Appl. Sci. 2014. Vol. 37, No. 11. P. 1668–1686.
3. Кубышкин В.А., Постнов С.С. Задача оптимального управления линейной стационарной системой дробного порядка в форме проблемы моментов: постановка и исследование // Автоматика и телемеханика. 2014. №. 5. С. 3-17.
4. Kubyshkin V.A., Postnov S.S. The Optimal Control Problem for Linear Systems of Non-integer Order with Lumped and Distributed Parameters // Discontinuity, Nonlinearity and Complexity. 2015. Vol. 4, No. 4. P. 429-443.
5. Hilfer R. Fractional time evolution // Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore: World Scientific, 2000. P. 87-130.
6. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
7. Постнов С.С. Задачи оптимального управления для линейных систем дробного порядка, заданных уравнениями с производной Адамара // Доклады Академии наук. 2017. Т. 476, № 2. С. 143-147.
8. Постнов С.С. Задачи оптимального управления для некоторых линейных систем дробного порядка, заданных уравнениями с производной Хильфера // Проблемы управления. 2018. № 5. С. 14-25.
9. Постнова Е.А. Оптимальное управление движением системы, моделируемой двойным интегратором дробного порядка // Проблемы управления. 2018. № 2. С. 40-46.