

УДК 517.929

# ВЫДЕЛЕНИЕ НУЛЕВОЙ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

**Е.И. Атамась**

*МГУ им. М.В. Ломоносова*

Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1

E-mail: [eatamas@cs.msu.ru](mailto:eatamas@cs.msu.ru)

**Ключевые слова:** системы с запаздыванием, несоизмеримые запаздывания, канонические формы, нулевая динамика, обращение систем.

**Аннотация:** Для квадратной линейной стационарной управляемой системы, описываемой функционально-дифференциальными уравнениями с несоизмеримыми запаздываниями строится каноническая форма с выделением нулевой динамики, описывается алгоритм приведения к ней и условия, при которых такое приведение возможно.

Каноническая форма с выделением нулевой динамики играет важную роль в решении многих задач математической теории автоматического управления. Она возникает, в частности, при решении задач обращения и наблюдения для различных классов управляемых систем. Целью данной работы является получение такой формы для систем, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями с несоизмеримыми запаздываниями. Оказывается, что обобщение результатов, полученных ранее для систем с соизмеримыми запаздываниями [3], требует привлечения значительно более сложного математического аппарата.

Рассматривается линейная стационарная управляемая система вида

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^k A_i x(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^k B_i \xi(t - \tau_i), \\ y(t) = \sum_{i=0}^k C_i x(t - \tau_i), \end{cases}$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — фазовый вектор системы,  $y \in \mathbb{R}^l$  — выход системы,  $\xi \in \mathbb{R}^m$  — входной сигнал.

Нас будет интересовать случай, когда запаздывания  $\tau_i$  могут быть несоизмеримы между собой. Напомним, что вещественные числа  $\tau_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , называются соизмеримыми, если существует такое число  $\tau$ , что  $\tau_i = n_i \tau$ ,  $n_i \in \mathbb{N}$ . Случай несоизмеримых запаздываний является значительно более сложным, нежели случай, когда запаздывания предполагаются соизмеримыми.

Для простоты мы ограничимся рассмотрением квадратных систем, для которых  $m = l$ .

В основе предлагаемого подхода лежит представление системы с запаздыванием в алгебраической форме [1]. Разобьем все запаздывания на классы соизмеримых

между собой, порождаемых запаздываниями  $\bar{\tau}_j$ ,  $1 \leq j \leq p$  соответственно. Для каждого из этих запаздываний введем оператор сдвига  $\delta_j : f(t) \mapsto f(t - \tau_j)$ . Тогда система может быть переписана в виде

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^{p_j} A_{ij} \delta_j^i x(t) + \sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^{p_j} B_{ij} \delta_j^i \xi(t), \\ y(t) = \sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^{p_j} C_{ij} \delta_j^i x(t), \end{cases}$$

где  $p_j$  — максимальное из чисел  $n_i$ , соответствующих  $j$ -ому классу.

Далее, формально заменяя оператор  $\delta_j$  алгебраической переменной  $\Delta_j$ , получаем систему

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + B\xi, \\ y = Cx, \end{cases}$$

где  $A = A(\Delta_1, \dots, \Delta_p)$ ,  $B = B(\Delta_1, \dots, \Delta_p)$ ,  $C = C(\Delta_1, \dots, \Delta_p)$  — матрицы с элементами из кольца многочленов  $\mathbb{R}[\Delta_1, \dots, \Delta_p]$ .

**Пример 1.** В качестве примера рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + x(t-1) + 2x(t-\sqrt{3}) + u(t) + 2u(t-1) - 3u(t-2\sqrt{3}), \\ y(t) = 2x(t) - x(t-2) + 3x(t-\sqrt{3}). \end{cases}$$

Сопоставим классу запаздывания  $\tau_1 = 1$  переменную  $\Delta_1$ , классу запаздывания  $\tau_2 = \sqrt{3}$  переменную  $\Delta_2$ . В результате система будет записана в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 + \Delta_1 + 2\Delta_2)x + (1 + 2\Delta_1 - 3\Delta_2^2)u, \\ y(t) = (2 - \Delta_1^2 + 3\Delta_2)x. \end{cases}$$

Далее напомним важное определение.

**Определение 1.** Вектор  $r = (r_1, \dots, r_m)$  определяет относительный векторный порядок, если выполнены следующие условия:

1)  $c_i B = 0$ ,  $c_i AB = 0$ ,  $\dots$ ,  $c_i A^{r_i-2} B = 0$ ,  $c_i A^{r_i-1} B \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ .

2)  $\det \begin{pmatrix} c_1 A^{r_1-1} B \\ \vdots \\ c_m A^{r_m-1} B \end{pmatrix} = \det H_r(\Delta) \neq 0$ .

В случае, когда  $\det H_r(\Delta) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (такие матрицы называются *унимодулярными*), т. е. матрица  $H_r(\Delta)$  обратима, относительный порядок называется *чистым*.

В дальнейшем мы будем предполагать, что система обладает чистым относительным порядком.

**Лемма 1.** Пусть система обладает векторным относительным порядком  $r = (r_1, \dots, r_m)$ . Тогда строки  $c_1$ ,  $c_1 A$ ,  $\dots$ ,  $c_1 A^{r_1-1}$ ,  $c_2$ ,  $c_2 A$ ,  $\dots$ ,  $c_2 A^{r_2-1}$ ,  $c_m$ ,  $c_m A$ ,  $\dots$ ,  $c_m A^{r_m-1}$  линейно независимы.

Составим из этих строк матрицу  $T_1$ .

$$T_1(\Delta) = \left[ \begin{array}{c} c_1 \\ c_1 A \\ \vdots \\ c_1 A^{r_1-2} \\ \hline \vdots \\ c_m \\ c_m A \\ \vdots \\ c_m A^{r_m-2} \\ \hline c_1 A^{r_1-1} \\ \vdots \\ c_m A^{r_m-1} \end{array} \right].$$

Замены координат в системах над кольцами осуществляются унимодулярными матрицами. Напомним, что матрица называется унимодулярной, если ее определитель обратим над рассматриваемым кольцом. В интересующем нас случае кольца многочленов от нескольких переменных данное условие превращается в следующее: матрица унимодулярна, если ее определитель есть ненулевое вещественное число.

Нашей основной задачей является построение канонической формы с выделением нулевой динамики. Для это необходимо получить унимодулярную матрицу замены координат вида

$$T = \left[ \begin{array}{c} T' \\ T_1 \end{array} \right].$$

Другими словами, необходимо дополнить матрицу  $T_1$  до квадратной унимодулярной. Возникает следующий вопрос: при каких матрицах  $T_1$  такое дополнение возможно?

**Теорема 1.** *Матрицу над полиномиальным кольцом можно дополнить до унимодулярной тогда и только тогда, когда идеал, порожденный ее минорами максимального порядка, совпадает с самим кольцом.*

Необходимость условия теоремы доказывается элементарно, тогда как доказательство достаточности базируется на продвинутом алгебраическом результате — теореме Квиллена-Суслина [2].

Имеет место следующая основная теорема.

**Теорема 2.** *Пусть система (1) обладает чистым векторным относительным*

порядком. Тогда она обратимым преобразованием приводима к виду

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1^1 = y_2^1, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_1-1}^1 = y_{r_1}^1, \\ \vdots \\ \dot{y}_1^m = y_2^m, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m-1}^m = y_{r_m}^m, \end{array} \right. \\ \left( \begin{array}{c} \dot{y}_{r_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m}^m \end{array} \right) = A_{21}\bar{x} + A_{22}\bar{y} + H_r\xi, \end{array} \right.$$

где  $\bar{y} = (y_1^1, \dots, y_{r_1-1}^1, y_2^2, \dots, y_{r_2-1}^2, \dots, y_1^m, \dots, y_{r_m-1}^m, y_{r_1}^1, \dots, y_{r_m}^m)$ ,  $y_i = y_1^i$  — выходы системы;  $y_j^i = y_i^{(j-1)}$  — производные выходов;  $\bar{x}' \in R^{n-|r|}$  — оставшиеся координаты.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-37-00106 мол\_а).

## Список литературы

1. Morse A.S. Ring Models for Delay-Differential Systems // IFAC Proceedings Volumes. 1974. Vol. 7, No. 1. P. 439-445.
2. Lam T. Y. Serre's problem on projective modules. New York: Springer Science+Business Media, 2006. 300 p.
3. Ильин А.В., Атамась Е.И., Фомичев В.В. О приведении систем с запаздыванием к форме с выделением нулевой динамики // Доклады Академии наук. 2018. Т. 480, № 1. С. 11-15.