УДК 517.929.4

К ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ МЫШКИСА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.В. Егоров

Санкт-Петербургский государственный университет

Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9

E-mail: alexey.egorov@spbu.ru

Ключевые слова: системы с запаздыванием, устойчивость, метод Разумихина, задача Мышкиса, переменное запаздывание.

Аннотация: Работа посвящена исследованию устойчивости линейных систем с одним зависящим от времени запаздыванием. Под обобщённой задачей Мышкиса понимается задача определения условий равномерной устойчивости для систем с произвольным ограниченным запаздыванием. В случае скалярного уравнения с вещественным коэффициентом задача была решена Мышкисом, и результат известен как теорема о трёх вторых. Мы же рассматриваем систему из нескольких уравнений. Получены достаточные условия устойчивости, частным случаем которых является упомянутая выше теорема Мышкиса.

1. Введение

В работе [1] Мышкис рассмотрел скалярное уравнение с переменным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = -bx(t - \tau(t))$$

и определил, при каких значениях коэффициента b уравнение равномерно устойчиво при любом запаздывании, ограниченном некоторой константой h. Получился весьма красивый результат – оказалось, что произведение bh должно принадлежать отрезку $[0, 3/2]$. Причём это условие является, как необходимым, так и достаточным в том смысле, что, если $bh > 3/2$, можно найти запаздывание $\tau(t)$ со значениями из $[0, h]$, при котором уравнение является неустойчивым.

Этот результат был обобщён в нескольких направлениях [2–5]. Однако все эти обобщения объединяет то, что они посвящены скалярному уравнению с вещественными коэффициентами. Было бы интересно получить аналогичный результат для системы уравнений. На данный момент существует ряд работ, предлагающих методы нахождения достаточных условий асимптотической устойчивости для систем с произвольным ограниченным запаздыванием (как правило, с ограниченной производной). В основном эти методы основаны на технике линейных матричных неравенств (LMI) для функционалов Ляпунова–Красовского. Как известно, такие методы бывают весьма консервативны, и они не дают явных выражений для границ устойчивости, а лишь предоставляют возможность проверить систему на асимптотическую устойчивость.

В данной работе мы рассматриваем такое же уравнение, как и в работе Мышкиса, но допускаем, что его коэффициент является комплексным числом. Таким образом, мы, фактически, исследуем систему вида

$$\dot{x}(t) = -Ax(t - \tau(t)), \tag{1}$$

которая распадается на n независимых уравнений, если перейти к жордановой форме матрицы A. В настоящей работе с помощью метода Разумихина получены достаточные условия равномерной устойчивости при произвольном ограниченном запаздывании с ограничением на скорость роста. Границы получаемой области устойчивости выражаются в радикалах, что в некоторой степени сближает полученный результат с теоремой о трёх вторых. В предельном случае, когда мнимая часть b стремится к нулю, полученный результат совпадает с результатом Мышкиса.

2. Предварительные сведения

Как было указано во введении, исследование устойчивости системы (1) сводится к исследованию устойчивости скалярного уравнения с комплексным коэффициентом $b = \alpha + i\beta$. А это, в свою очередь, эквивалентно исследованию системы (1) с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где α, $\beta \in [0, \infty)$. Случай $\alpha < 0$ мы можем исключить из рассмотрения, так как при таких α даже система с нулевым запаздыванием будет неустойчива.

Мы предполагаем, что τ – переменное положительное запаздывание, ограниченное снизу нулём, а сверху числом $h > 0$, т.е. $0 \leqslant \tau(t) \leqslant h$, $t \in [-h, \infty)$. Заметим, что число h может быть выбрано равным единице за счёт масштабирования времени.

Учитывая, что объём статьи строго ограничен, мы не приводим точные определения решения системы и равномерной устойчивости, заметим только, что они абсолютно стандартные. В качестве векторной нормы используем евклидову норму.

Очертим множество возможных запаздываний.

Определение 1. *Функция $\tau(t)$, $t \in [-1, \infty)$, называется допустимым запаздыванием, если она кусочно-непрерывна на множестве $[-1, \infty)$ (т.е. имеет конечное число точек разрыва на любом отрезке, содержащемся в этом множестве), непрерывна справа в каждой точке и удовлетворяет двум свойствам:*

1. $0 \leqslant \tau(t) \leqslant 1$ для любых $t \in [-1, \infty)$,

2. $\dfrac{\tau(t) - \tau(\theta)}{t - \theta} \leqslant 1$, для любых t, $\theta \in [-1, \infty)$, $t \neq \theta$.

Первое условие – ограничение на величину запаздывания. Как было сказано выше, то, что верхняя граница взята равной 1, не ограничивает общности результата, в отличие от второго ограничения, ограничения на скорость роста запаздывания – запаздывание не может расти быстрее функции t. Причём стоит отметить, что ограничений на скорость убывания нет, она даже может быть равной бесконечности, т.е. функция может иметь скачки, но только отрицательной величины (т.е. ”скачки вниз”).

Определение 2. *Будем говорить, что пара вещественных чисел* (α, β) *решает обобщённую задачу Мышкиса, если система* (1) *с матрицей* (2) *равномерно устойчива при любом допустимом запаздывании.*

Сформулируем результат Мышкиса в виде теоремы.

Теорема 1 (Мышкис, [1])**.** *Пара* $(\alpha, 0)$ *решает обобщённую задачу Мышкиса тогда и только тогда, когда* $\alpha \in [0, 3/2]$.

Введём теорему Разумихина применительно к рассматриваемой системе (1). Мы берём простейшую функцию Ляпунова $v(x) = \|x\|^2$.

Теорема 2. *Система* (1) *равномерно устойчива, если найдётся число* $N \geqslant 1$, *такое что для каждого* $t \geqslant 0$ *неравенство*

$$\varphi^T(0) A \varphi(-\tau(t)) \geqslant 0$$

выполняется для всех непрерывных функций $\varphi(\theta)$, *заданных на отрезке* $[-N, 0]$ *и удовлетворяющих условию* $\|\varphi(\theta)\| < \|\varphi(0)\|$, $\theta \in [-N, 0)$, *и системе*

$$\frac{d}{d\theta}\varphi(\theta) = -A\varphi(\theta - \tau(t+\theta)) \tag{3}$$

почти всюду на отрезке $[-N+1, 0]$.

Этот вариант теоремы Разумихина можно найти, например, в работе [6]. Фактически, это классический вариант теоремы Разумихина, если ввести в систему искусственное запаздывание N и расширить область задания начальных функций соответствующим образом.

3. Основные результаты

Для того чтобы получаемые формулы имели более простой вид, мы представим число β в виде $\beta = k\alpha$, $k \geqslant 0$. Такой приём исключает случай $\alpha = 0$, $\beta > 0$, но он соответствует системе, неустойчивой даже при постоянном запаздывании, поэтому нас не интересует. Дополнительно введём

$$q = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Первая теорема даёт необходимое условие того, что пара (α, β) решает обобщённую задачу Мышкиса. Это условие выводится очень легко – нужно рассмотреть постоянное запаздывание, а точнее $\tau(t) \equiv 1$.

Теорема 3. *Если пара* $(\alpha, k\alpha)$ *решает обобщённую задачу Мышкиса, то*

$$0 \leqslant \alpha \leqslant q \arcsin q.$$

Теперь получим достаточные условия того, что пара $(\alpha, k\alpha)$ решает обобщённую задачу Мышкиса. Применим для этого теорему Разумихина сначала в самом простом варианте. Это вариант теоремы 2 с $N = 2$ (т.е. классический вариант теоремы Разумихина). За недостатком места мы опустим доказательство.

Теорема 4. *Пара* $(\alpha, k\alpha)$ *решает обобщённую задачу Мышкиса, если*

$$0 \leqslant \alpha \leqslant q^2.$$

Усилим полученный результат. Для этого мы снова применим теорему Разумихина, но в усложнённом варианте. Это усложнение основано на идее, применённой в [6] для исследования устойчивости скалярного вещественного уравнения с постоянным запаздыванием.

Теорема 5. *Пара* $(\alpha, k\alpha)$ *решает обобщённую задачу Мышкиса, если неравенство*

$$\frac{z^2}{2} - qz + 1 + q - p - \frac{p-z}{2}\min\{0, p-z\} - \sqrt{1-q^2}\sqrt{z(2-z)} \geqslant 0, \tag{4}$$

где $p = \alpha/q$, *выполнено для всех* $z \in [0, 1]$.

Доказательство. Мы не имеем возможности привести здесь полное доказательство, лишь попытаемся описать основную идею. Применяем теорему 2 с $N = 3$. Интегрирование равенства (3) на различных интервалах, а также некоторые несложные приёмы позволяют получить следующую оценку:

$$1 - \varphi^T(0)\varphi(-\tau(t)) \leqslant \int\limits_0^{\tau(t)} \min\left\{p, p^2(1-\theta) - \varphi^T(0)A\varphi(-\tau(t))\right\} d\theta.$$

Далее доказываем от противного, то есть предполагаем, что $\varphi^T(0)A\varphi(-\tau(t)) < 0$. Вводим две независимые переменные:

$$x_1 = \varphi^T(0)\varphi(-\tau(t)),$$

$$x_2 = \varphi^T(0)A\varphi(-\tau(t)).$$

Эта идея, а также некоторые алгебраические преобразования в итоге приводят нас к тому, что для равномерной устойчивости достаточно, чтобы следующая система не имела решений относительно переменных z_1 и z_2:

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_1 & > & 0, \\ z_1^2 + z_2^2 & < & 1, \\ 1 + qz_1 + qkz_2 & \leqslant & p\int\limits_0^1 \min\{1, \theta p + z_1\}\, d\theta. \end{array}\right. \tag{5}$$

Применяя к её исследованию геометрические соображения, выводим доказываемый результат.

Заметим, что условие представленной теоремы довольно легко проверить аналитическими методами, если α и k заданы. Однако нас интересует поиск наибольших возможных значений параметров, решающих обобщённую задачу Мышкиса. Поэтому следующая задача – при заданном k найти наибольшее возможное значение α, при котором неравенство (4) выполняется для всех $z \in [0, 1]$.

Применение аналитических методов приводит к следующему алгоритму.

Алгоритм нахождения наибольшего возможного в рамках предложенного метода значения $\alpha_{max}(k)$ параметра α, решающего обобщённую задачу Мышкиса при заданном $k > 0$:

1) По заданному $k > 0$ вычисляем $q = (1 + k^2)^{-1/2}$.

2) Сравниваем полученное число q с числом $q_0 = \dfrac{7\sqrt{13} - 4}{27}$. Если $q \leqslant q_0$, то выполняем только шаг 3) этого алгоритма. Если же $q > q_0$, то, наоборот, выполняем только шаг 4).

3) Находим на интервале $(q, 1)$ единственный простой корень $p = p_0$ уравнения

$$p^3 - 8p + 8q = 0.$$

Вычисляем искомое

$$\alpha_{max}(k) = q \cdot p_0.$$

4) Находим на интервале $(q, 1)$ единственный простой корень $z = z_0$ уравнения

$$z^4 - 2(1 + q)z^3 + (1 + 4q)z^2 - 2z + 1 - q^2 = 0.$$

Вычисляем искомое

$$\alpha_{max}(k) = \frac{q\left(z_0^3 - 3qz_0^2 + 2(2 + q)z_0 - 2(1 + q)\right)}{2(z_0 - q)}.$$

Замечание. *Таким образом, задача сводится к решению полиномиальных уравнений третьего или четвёртого порядка. Как известно, решения таких уравнений можно выразить в радикалах по формулам Кардано и Феррари.*

4. Заключение

В работе сформулирована обобщённая задача Мышкиса и получено множество коэффициентов для скалярного уравнения с постоянным комплексным коэффициентом и одним переменным запаздыванием, решающих эту задачу. К сожалению, нам пока не удалось доказать (или опровергнуть) то, что это множество является точным, то есть не может быть расширено. Это один из недостатков. Второй недостаток состоит в том, что нам пришлось ввести ограничение на скорость роста запаздывания, которого не было в оригинальной работе Мышкиса.

Представленный метод может быть применён и для других классов уравнений и систем с запаздыванием.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00146.

Список литературы

1. Мышкис А.Д. О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Математический сборник. 1951. Т. 28, № 3. С. 641-658.
2. Yorke J.A. Asymptotic Stability for one Dimensional Differential-Delay Equations // J. of Differential Equations. 1970. Vol. 7. P. 189-202.
3. Amemiya T. On the Delay-Independent Stability of a Delayed Differential Equation of 1st Order // J. of Mathematical Analysis and Applications. 1989. Vol. 142. P. 13-25.

4. Yoneyama T. The 3/2 Stability Theorem for One-Dimensional Delay-Differential Equations with Unbounded Delay // J. of Mathematical Analysis and Applications. 1992. Vol. 165. P. 133-143.
5. Малыгина В.В. Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с последействием // Известия высших учебных заведений. Математика. 1993. № 5 (372). С. 72-85.
6. Kolmanovskii V., Myshkis A. Introduction to the Theorey and Applications of Fonctional Differential Equations. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1999. 648 p.