

УДК 517.929, 517.977

О НАЗНАЧЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО СПЕКТРА ДЛЯ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В.А. Зайцев

Удмуртский государственный университет
Россия, 426034, Ижевск, Университетская ул., 1
E-mail: verba@udm.ru

И.Г. Ким

Удмуртский государственный университет
Россия, 426034, Ижевск, Университетская ул., 1
E-mail: kimingeral@gmail.com

Ключевые слова: линейные системы с запаздыванием, назначение спектра, стабилизация, билинейные системы.

Аннотация: Рассматривается билинейная управляемая система, заданная линейной стационарной системой дифференциальных уравнений с запаздыванием в состоянии. Исследуется задача назначения произвольного конечного спектра посредством стационарного управления. Требуется построить постоянный вектор управления таким образом, чтобы характеристический квазиполином замкнутой системы обращался в полином с произвольными наперед заданными коэффициентами. Получены условия на коэффициенты системы, при которых найден критерий разрешимости данной задачи назначения конечного спектра. Критерий выражен в терминах ранговых условий для матриц специального вида. Показана взаимосвязь этих ранговых условий со свойством согласованности усеченной системы без запаздывания. Результаты обобщают полученные ранее результаты о назначении спектра для линейных систем со статической обратной связью по выходу с запаздыванием и для билинейных систем без запаздывания.

Задачи стабилизации билинейных систем с запаздыванием изучались в работах [1–5]. В работах [2, 4, 5] на основе метода Ляпунова–Красовского сформулированы условия стабилизации исследуемых систем посредством обратной связи по состоянию, они выражены в терминах линейных матричных неравенств и разрешимости уравнения Риккати. В [1, 3] для получения достаточных условий глобальной стабилизации посредством статической обратной связи по состоянию и динамической обратной связи по выходу применяется принцип инвариантности Ла-Салля. Здесь получены условия разрешимости задачи назначения произвольного конечного спектра посредством стационарного управления и, как следствие, условия стабилизации для билинейной стационарной системы с запаздыванием.

Введем обозначения. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; \mathbb{K}^n — линейное n -мерное пространство векторов-столбцов $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{K}$ над полем \mathbb{K} ; $M_{m,n}(\mathbb{K})$ — пространство $m \times n$ -матриц с элементами из поля \mathbb{K} ; $M_n(\mathbb{K}) := M_{n,n}(\mathbb{K})$; $\text{Sp } H$ — след

матрицы $H \in M_n(\mathbb{K})$.

Рассмотрим билинейную стационарную систему с запаздыванием по состоянию

$$(1) \quad \dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 x(t-h) + \left(\sum_{j=1}^r u_j A_j \right) x(t) + \left(\sum_{\ell=1}^s v_\ell B_\ell \right) x(t-h), \quad t > 0,$$

с начальными условиями $x(\tau) = \mu(\tau)$, $\tau \in [-h, 0]$; здесь $A_j, B_\ell \in M_n(\mathbb{K})$, $j = \overline{0, r}$, $\ell = \overline{0, s}$; $h > 0$ — постоянное запаздывание, $\mu: [-h, 0] \rightarrow \mathbb{K}^n$ — непрерывная функция; $x \in \mathbb{K}^n$ — вектор фазовых координат, $u = \text{col}(u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{K}^r$, $v = \text{col}(v_1, \dots, v_s) \in \mathbb{K}^s$ — векторы управляющего воздействия.

Обозначим через

$$\varphi(\lambda, e^{-\lambda h}) = \det \left[\lambda I - \left(A_0 + \sum_{j=1}^r u_j A_j \right) - e^{-\lambda h} \left(B_0 + \sum_{\ell=1}^s v_\ell B_\ell \right) \right]$$

характеристический квазиполином системы (1). Характеристическое уравнение $\varphi(\lambda, e^{-\lambda h}) = 0$ системы (1) имеет вид

$$(2) \quad \lambda^n + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^i \delta_{ik} \lambda^{n-i} e^{-\lambda h k} = 0.$$

Здесь числа δ_{ik} зависят от A_j, B_ℓ, u_j, v_ℓ . Множество $\sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi(\lambda, e^{-\lambda h}) = 0\}$ корней уравнения (2) называется спектром системы (1). Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то спектр σ симметричен относительно вещественной оси. В общем случае спектр σ состоит из счетного числа точек $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Если в уравнении (2) $\delta_{ik} = 0$ для всех $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, i}$, то характеристический квазиполином обращается в полином, и спектр σ системы (1) является конечным множеством. Рассмотрим задачу назначения произвольного конечного спектра σ системы (1) посредством стационарного управления.

Определение 1. Будем говорить, что задача назначения произвольного конечного спектра системы (1) посредством стационарного управления разрешима, если для любого набора $\gamma_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, найдутся векторы $u \in \mathbb{K}^r$, $v \in \mathbb{K}^s$ такие, что

$$(3) \quad \varphi(\lambda, e^{-\lambda h}) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n.$$

Пусть коэффициенты системы (1) имеют специальный вид: матрица A_0 имеет нижнюю форму Хессенберга с ненулевыми элементами первой наддиагонали; для некоторого $p \in \{1, \dots, n\}$ первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов матриц A_j , $j = \overline{1, r}$, равны нулю, то есть

$$(4) \quad A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{i,i+1} \neq 0, \quad i = \overline{1, n-1};$$

$$(5) \quad A_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{A}_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{A}_j \in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}), \quad j = \overline{1, r}.$$

Для такой системы без запаздывания (то есть в случае, когда $B_\ell = 0$, $\ell = \overline{0, s}$) в работе [6] (см. также [7]) доказано, что задача управления спектром разрешима тогда

и только тогда, когда ранг матрицы $\Gamma = \{\text{Sp}(A_j A_0^{i-1})_{i,j=1}^{n,r}\}$ равен n . В настоящей работе этот результат обобщается на системы с запаздыванием. Будем предполагать, что матрицы B_ℓ , $\ell = \overline{0, s}$, системы (1) также имеют специальный вид: первые $p - 1$ строк и последние $n - p$ столбцов матриц B_ℓ , $\ell = \overline{0, s}$, равны нулю, то есть

$$(6) \quad B_\ell = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{B}_\ell & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{B}_\ell \in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}), \quad \ell = \overline{0, s}, \quad p \in \{1, \dots, n\}.$$

Здесь число p в (6) то же, что и в (5).

По системе (1) построим матрицы $\Gamma_0 \in M_{n,r}(\mathbb{K})$, $\Gamma_1 \in M_{n,s}(\mathbb{K})$, $A_1 \in M_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} \text{Sp}(A_1) & \text{Sp}(A_2) & \dots & \text{Sp}(A_r) \\ \text{Sp}(A_1 A_0) & \text{Sp}(A_2 A_0) & \dots & \text{Sp}(A_r A_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Sp}(A_1 A_0^{n-1}) & \text{Sp}(A_2 A_0^{n-1}) & \dots & \text{Sp}(A_r A_0^{n-1}) \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \text{Sp}(B_1) & \text{Sp}(B_2) & \dots & \text{Sp}(B_s) \\ \text{Sp}(B_1 A_0) & \text{Sp}(B_2 A_0) & \dots & \text{Sp}(B_s A_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Sp}(B_1 A_0^{n-1}) & \text{Sp}(B_2 A_0^{n-1}) & \dots & \text{Sp}(B_s A_0^{n-1}) \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \text{Sp}(B_0) \\ \text{Sp}(B_0 A_0) \\ \dots \\ \text{Sp}(B_0 A_0^{n-1}) \end{pmatrix}$$

и матрицу $\Delta_1 = [\Gamma_1, A_1] \in M_{n,s+1}(\mathbb{K})$.

Теорема 1. Пусть матрицы системы (1) имеют специальный вид (4), (5), (6). Тогда задача назначения произвольного конечного спектра системы (1) посредством стационарного управления разрешима в том и только в том случае, если выполнены следующие условия:

$$(7) \quad \text{rank } \Gamma_0 = n,$$

$$(8) \quad \text{rank } \Gamma_1 = \text{rank } \Delta_1.$$

Замечание 1. Теорема 1 обобщает результаты [8, §1] о назначении произвольного конечного спектра для линейной стационарной управляемой системы с запаздыванием, замкнутой линейной статической обратной связью по выходу с запаздыванием.

Замечание 2. Предположим, что система (1) не имеет запаздывания, т.е. $B_\ell = 0$, $\ell = \overline{0, r}$. Тогда условие (8) выполнено. В таком случае теорема 1 совпадает с теоремой 2 [6]. Таким образом, теорема 1 обобщает результаты [6] для билинейных систем без запаздывания на билинейные системы (1) с запаздыванием.

Рассмотрим задачу стабилизации системы (1) посредством стационарного управления: требуется построить $u \in \mathbb{K}^r$, $v \in \mathbb{K}^s$ такие, что система (1) асимптотически устойчива. Система (1) асимптотически устойчива, если спектр σ системы (1) лежит в левой полуплоскости $\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda < 0\}$. Если задача назначения произвольного конечного спектра системы (1) посредством стационарного управления разрешима, тогда, выбирая многочлен (3) таким образом, что его корни лежат в ω , можно добиться асимптотической устойчивости системы (1). Таким образом, из теоремы 1 вытекает очевидное следствие.

Следствие 1. Пусть матрицы системы (1) имеют специальный вид (4), (5), (6). Предположим, что выполнены условия (7), (8). Тогда система (1) стабилизируема посредством стационарного управления.

Построим по системе (1) усеченную систему (без запаздывания), предполагая, что $B_\ell = 0$, $\ell = \overline{0, s}$:

$$(9) \quad \dot{x}(t) = \left(A_0 + \sum_{j=1}^r u_j A_j \right) x(t).$$

Через $X(t, s)$ обозначим матрицу Коши свободной системы $\dot{x}(t) = A_0 x(t)$. Следовательно, $X(t, s) = e^{(t-s)A_0}$.

Определение 2. Система (9) называется согласованной на отрезке $[t_0, t_1]$, если для любой матрицы $H \in M_n(\mathbb{K})$ существует кусочно-непрерывное управление $\hat{u} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{K}^r$ такое, что решение $n \times n$ -матричной задачи Коши

$$\dot{Z}(t) = A_0 Z(t) + \sum_{j=1}^r (\hat{u}_j(t) A_j) X(t, t_0), \quad Z(t_0) = 0,$$

удовлетворяет условию $Z(t_1) = H$.

Свойство согласованности (не обязательно стационарной) системы (9) было введено в [9]. Стационарные согласованные системы (9) были исследованы в [10, 11]. В [10, Утверждение 5] доказано, что для системы (9) с циклической матрицей A_0 (в частности, с матрицей A_0 вида (4)) свойство согласованности является достаточным для выполнения условия (7). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть матрицы системы (1) имеют специальный вид (4), (5), (6). Пусть усеченная система (9) согласованна, и выполнено условие (8). Тогда задача назначения произвольного конечного спектра системы (1) посредством стационарного управления разрешима.

Следствие 2. Пусть матрицы системы (1) имеют специальный вид (4), (5), (6). Пусть система (9) согласованна, и выполнено условие (8). Тогда система (1) стабилизируема посредством стационарного управления.

Замечание 3. Предположим, что система (1) не имеет запаздывания, т.е. $B_\ell = 0$, $\ell = \overline{0, r}$. Тогда условие (8) выполнено. В таком случае теорема 2 совпадает с утверждением (1 \Rightarrow 3) теоремы 2 [10]. Таким образом, теорема 1 вместе с теоремой 2 обобщают результаты теоремы 2 [10] для билинейных систем без запаздывания на билинейные системы (1) с запаздыванием.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-51-41005) и Министерства науки и высшего образования РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки (проект 1.5211.2017/8.9).

Список литературы

1. Ho D.W.C., Lu G., Zheng Y. Global stabilization for bilinear systems with time delay // IEE Proceedings – Control Theory and Applications. 2002. Vol. 149, No. 1. P. 89-94. <https://doi.org/10.1049/ip-cta:20020114>
2. Liu P.-L. Stabilization criteria for bilinear systems with time-varying delay // Universal Journal of Electrical and Electronic Engineering. 2014. Vol. 2, No. 2. P. 52-58. <https://doi.org/10.13189/ujeee.2014.020202>

3. Lu G., Ho D.W.C. Solution existence and stabilization for bilinear descriptor systems with time-delay // 2006 9th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision. 2006. <https://doi.org/10.1109/ICARCV.2006.345310>
4. Niculescu S.-I., Tarbouriech S., Dion J.-M., Dugard L. Stabilization criteria for bilinear systems with delayed state and saturating actuators // Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control. 1995. <https://doi.org/10.1109/cdc.1995.480652>
5. Yoneyama J. Stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy bilinear time-delay systems // 2010 IEEE International Symposium on Intelligent Control. 2010. <https://doi.org/10.1109/isic.2010.5612886>
6. Зайцев В.А. Необходимые и достаточные условия в задаче управления спектром // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 12. С. 1789-1793.
7. Зайцев В.А. Управление спектром в билинейных системах // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 7. С. 1061-1064.
8. Зайцев В.А., Ким И.Г. Задача назначения конечного спектра в линейных системах с запаздыванием по состоянию при помощи статической обратной связи по выходу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26, Вып. 4. С. 463-473.
9. Зайцев В.А., Тонков Е.Л. Достижимость, согласованность и метод поворотов В.М. Миллионщикова // Известия вузов. Математика. 1999. № 2. С. 45-56.
10. Зайцев В.А. Согласованные системы и управление спектром собственных значений. I // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 1. С. 117-131.
11. Зайцев В.А. Согласованные системы и управление спектром собственных значений. II // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 6. С. 851-859.