УДК 517.977

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВ I

Н.Е. Роднищев
Казанский национальный исследовательский технический университет – КАИ им. А.Н. Туполева
Россия, 420111 Казань, ул. К. Маркса, 10
E-mail: nrodnishev@yandex.ru

Ключевые слова: оптимальное управление, стохастическая система, запаздывание, ограничения.

Аннотация: Рассматриваются необходимые условия оптимального управления в нелинейных стохастических системах с запаздыванием и ограничениями типа неравенств на функции управления, параметры и вектор состояния в конечный момент времени.

1. Введение

В работе рассматриваются необходимые условия оптимального управления в нелинейных стохастических системах с запаздыванием и ограничениями типа неравенств на параметры, функцию управления и компоненты вектора состояния системы. Используя расширение фазового пространства [1], исходный процесс, описываемый системой стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием, сводится к диффузионному марковскому процессу. Для исследования необходимых условий оптимальности управления используются конструкции доказательств, изложенные в работах [2, 3]

2. Постановка задачи

Рассматривается задача определения оптимальной r-мерной вектор функции управления $u(t) \in L_2$ и m-мерного вектора параметров $a \in E_m$, которые обеспечивают минимум терминальному функционалу

(1) $$I_0\left(u\right) = \int\limits_{\Omega} \Phi_0(x,a)\,p(t_f,x)dx \to \min,$$

характеризующему эффективность функционирования управляемой системы, поведение которой на отрезке времени $[t_0,t_f]$ описывается нелинейными стохастическими дифференциальными уравнениями с запаздыванием

(2) $$dX_i = \varphi_i(t, X(t), X(t-\tau), u, a)\,dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(t, X(t))\,d\eta_j(t),$$

$$X_0(t) = \phi(t),\ \ t \in [t_0 - \tau, t_0],\ (i = 1,\dots,n),\ \ t \in [t_0, t_f],$$

и ограничениями

(3) $$I_k\left(u\right)=\int\limits_{\Omega}\Phi_k\left(x,a\right)p\left(t_f,x\right)dx-b_k\le 0,\quad k=\left\{1,...,q_0\right\},$$

(4) $$\psi_k(u)\le 0,\ k=\left\{1,\dots,r_0\right\},$$

(5) $$g_k(a)\le 0,\ k=\left\{1,\dots,m_0\right\},$$

которые описывают различные требования, предъявляемые к системе по функциям управления, конструктивным и энергетическим параметрам и компонентам вектора состояний в конечный момент времени.

Для сведения модели (2) к марковскому процессу отрезок времени $[t_0,t_f]$ покроем сеткой с шагом τ и узлами $t_q=t_0+q\tau,\quad q=1,\dots,N$, где q номер интервала $[t_{q-1},t_q]$, N − количество интервалов, $t_f=t_0+N\tau$. Введем на интервале $[t_{q-1},t_q]$ время $s\in\left[0,\tau\right]$ и рассмотрим расширенный вектор состояний

$$X_q(s)=(X^1(s),X^2(s),\dots,X^q(s))$$

с компонентами фазовых состояний

$$X^1(s)=(X_1(t_0+s),X_2(t_0+s),\dots,X_n(t_0+s)),$$
$$X^2(s)=(X_1(t_1+s),\ X_2(t_1+s),\dots,X_n(t_1+s)),$$
$$X^q(s)=(X_1(t_{q-1}+s),X_2(t_{q-1}+s),\dots,X_n(t_{q-1}+s)),$$

по последовательно примыкающим интервалам, где верхние индексы обозначает номер интервала. Обозначим управление и аддитивное возмущение векторными функциями

$$u^q(s)=(u_1(t_{q-1}+s),u_2(t_{q-1}+s),\dots,u_r(t_{q-1}+s)),$$
$$\eta^q(s)=(\eta_1(t_{q-1}+s),\eta_2(t_{q-1}+s),...,\eta_n(t_{q-1}+s)).$$

Тогда исходная задача (1) – (5) сводится к определению оптимального управления $u_N(t)=(u^1(s),u^2(s),\dots,u^q(s),...,u^N(s))$, которое доставляет минимум функционалу

(6) $$I_0\left(u_N\right)=\int\limits_{\Omega_N}\Phi_0(x_N,a)p(\tau,x_N)\,dx_N\to\min,$$

представляющему эффективность управления системой (2) на интервале $[t_0,t_f]$, которая по последовательно примыкающим участкам $[t_{q-1},t_q]$, $q=1,\dots,N$, описывается стохастическими дифференциальными уравнениями

(7) $$dX_i^m=\varphi_i(t_{m-1}+s,X^m,X^{m-1},u^m,a)\,ds+\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}(t_{m-1}+s,X^m)\,d\eta_j^m,$$

где

$$X_i^1(t_0)=x_{i0}(s)=\phi_i(t_0-\tau+s),\ (i=1,...,n),$$
$$X_i^m(t_{m-1})=X_i^{m-1}(t_{m-2}+\tau),\ (m=1,...,q;\ q=1,...,N)$$

с ограничениями (3)-(5).

Уравнения (7) последовательно по примыкающим участкам $[t_{q-1},t_q]$ описывают на отрезке времени $\left[t_0,t_f\right]$ диффузионный марковский процесс. Плотность вероятности $p\left(s,x_N\right)=p\left(s,x^1\right)p\left(s,x^2\mid\tau,x^1\right)p\left(s,x^3\mid\tau,x^2\right)p\left(s,x^N\mid\tau,x^{N-1}\right)$ состояний процесса $X_N(s)=[X^1(s),X^2(s),\dots,X^N(s)]$ для моментов времени $s\in\left[0,\tau\right]$ удовлетворяет уравнению Колмогорова-Фоккера-Планка (КФП)

$$\frac{\partial p\left(s, x_N\right)}{\partial s} - L\left(s, x_N, u_N\right) p\left(s, x_N\right) = 0,\ s \in \left[0, \tau\right]$$

с начальным распределением $p(0, x^1) = \delta(x_1 - x_0)$ и условиями сопряжения в узлах t_q

$$p(0, x^m) = p(\tau, x^{m-1}),\ (m = 1, \ldots, q;\ q = 2, \ldots, N),$$

где $p(0, x^m)$, $p(\tau, x^{m-1})$ маргинальные функции распределения векторов состояний системы $X^m\left(0\right)$ и $X^{m-1}\left(\tau\right)$. Таким образом, при расширении вектора состояний системы стохастическая задача (1)-(5) сводится к следующей эквивалентной детерминированной задаче с распределенными параметрами относительно плотности вероятности $p\left(s, x_N\right)$ вектора состояний системы:

(8) $$I_0\left(u_N\right) = \int_{\Omega_N} \Phi_0\left(x^N, a\right) p\left(\tau, x_N\right) dx_N \to \min$$

(9) $$\frac{\partial p\left(s, x_N\right)}{\partial s} - L\left(s, x_N, u_N\right) p\left(s, x_N\right) = 0,\ s \in \left[0, \tau\right],$$

$$p(0, x^1) = \delta(x_1 - x_0),\ p\left(0, x^m\right) = p\left(\tau, x^{m-1}\right),\ (m = 1, ..., q;\ q = 2, \ldots, N)$$

с ограничениями

(10) $$I_k\left(u_N\right) = \int_{\Omega_N} \varPhi_k\left(x^N, a\right) p\left(\tau, x_N\right) dx_N - b_k \le 0, \quad k = \left\{1, ..., q_0\right\},$$

(11) $$\psi_k(u_N) \le 0,\ k = \left\{1, \ldots, r_0\right\},$$

(12) $$\mathrm{g}_k(a) \le 0,\ k = \left\{1, \ldots, m_0\right\}.$$

Здесь $\Omega_N = \bigcup \Omega_m$ − семейство вложенных фазовых пространств, которое соответствует расширенному вектору $X_N(s) = (X^1(s), X^2(s), \ldots, X^N(s))$ состояний фазового пространства; x_N − реализация вектора состояний $X_N(s).$; $p(\tau, x_N) = p(\tau, x^1, x^2, \ldots, x^N)$ − плотность распределения расширенного вектора состояний; X_N. $x_N = (x^1, x^2, \ldots, x^N)$ − реализация расширенного вектора состояний и $dx_N = (dx^1, dx^2, \ldots, dx^N)$;

$$L(s, x_N, u_N) p(s, x_N) = -\sum_{m=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i^m}\left[A_i^m(s, x^m, x^{m-1}, u^m, a) p(s, x_N)\right] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{(\partial x_i^m)^2}\left[B_{ii}^m(s, x^m) p(s, x_N)\right];$$

$$A_i^m(s, x^m, x^{m-1}, u^m) = \varphi_i\,(t_{m-1} + s, x^m, x^{m-1}, u^m, a) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ij}\left(t_{m-1} + s, x^m\right)}{\partial x_i^m} \sigma_{ij}(t_{m-1} + s, x^m) G_j^\eta,$$

$$B_{ii}^m(s, x^m) = \sum_{j=1}^{n} (\sigma_{ij}(t_{m-1} + s, x^m))^2 G_j^\eta;$$

G_j^η − интенсивности винеровских процессов.

3. Необходимые условия оптимальности

Необходимые условия оптимальности управления в форме принципа минимума, аналогично [2, 3], устанавливает

Теорема 1 (слабый принцип минимума). *Пусть* (p^*, u_N^*) *− оптимальное решение задачи (8)-(12). Тогда необходимо существование неотрицательных векторов* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_{q_0}) \geq 0$, $\mu = (\mu_1, ..., \mu_{r_0}) \geq 0$, $\beta = (\beta_1, ..., \beta_{m_0}) \geq 0$ *и ограниченной с компактным носителем функции* $\lambda(s, x_N) \in C^{1,2}$, *таких что*

а) $\lambda(s, x_N)$ *удовлетворяет решению задачи Коши*

$$\frac{\partial \lambda(s, x_N)}{\partial s} + L^*(s, x_N, u_N^*)\lambda(s, x_N) = 0, \; s \in [\tau, 0], \tag{13}$$

$$\lambda(\tau, x_N) = \Phi_0(x^N, a) + \sum_{k=1}^{q_0} \alpha_k \mathit{\Phi}_k(x^N, a), \; \lambda(0, x^q) = \lambda(\tau, x^{q-1}), \; (q = 1, ..., N);$$

б) *для почти всех* $s \in [0, \tau]$ *и всех* $u_N(s)$ *выполнено условие*

$$\left(M\left(\frac{\partial R}{\partial u_N} \right) + \sum_{s=1}^{r_0} \mu_k \chi_{T_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial u_N} \right) \left(u_N - u_N^* \right) \geq 0; \tag{14}$$

в) вектор *параметров* a^* *удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=1}^{q_0} \alpha_k M\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial a} \right) + \int_{t_0}^{t_f} M\left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) dt + \sum_{k=1}^{m_0} \beta_k \frac{\partial g_k}{\partial a} \partial = 0. \tag{15}$$

Следствие. *Оптимальное управление удовлетворяет соотношению*

$$M\left(\frac{\partial R}{\partial u_N} \right) = -\sum_{s=1}^{r_0} \mu_k \chi_{T_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial u_N}. \tag{16}$$

В том случае, когда u_N^* реализуется в открытом ядре множества управлений U, то правая часть (16) полагается равной нулю. Здесь оператор $R = L^*(s, x_N, u_N)\lambda(s, x_N)$,

$$L^*\left(s, x_N, u_N\right)\lambda(s, x_N) = \sum_{m=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda(s, x_N)}{\partial x_i^m} \left[A_i^m \left(s, x^m, x^{m-1}, u^m, a \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 (s, x_N)}{(\partial x_i^m)^2} \left[B_{ii}^m (s, x^m) \right],$$

$M[\cdot]$ – оператор математического ожидания. χ_{T_k} − характеристическая функция на множестве $T_k = \left\{ t \in \left[t_0, t_f \right] : \psi_k\left(u(t) \right) = 0, \; k = (1, \ldots, m_0) \right\}$.

Поскольку условие (16) определяет r-мерный вектор

$$M\left(\frac{\partial R}{\partial u_N} \right) + \sum_{k=1}^{r_0} \mu_k \chi_{T_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial u},$$

опорный к множеству $U = \left\{ u_N \in E_r : \psi_s\left(u_N \right) \leq 0, \; k = (1, \ldots, m_0) \right\}$ в точке u_N^*, то из определения опорной функции, а также χ_{T_k} и T_k, следует, что в равномерно близкой окрестности точки u_N^*, выполняется условие

$$M[R(u_N, \cdot)] \geq M[R(u_N^*, \cdot)],$$

которое оправдывает название слабого (локального) принципа минимума.

4. Заключение

Сформулированные необходимые условия оптимальности управления и параметров в нелинейных стохастических систем с запаздыванием и ограничениями типа неравенств позволяют исследовать на единой методологической основе широкий класс таких систем, начиная от систем со случайными начальными условиями, когда случайные параметры и шумы отсутствуют (т.е. $B = 0$, $dW(t) = 0$, $d\eta(t) = 0$), и кончая системами с самой разнообразной структурой воздействия случайных параметров и возмущений.

Рассмотренный слабый принцип минимума устанавливает также связь с принципом оптимальности Беллмана, сформулированного для стохастических систем со смешанными ограничениями типа неравенств. Эта связь обусловлена тем, что обратный оператор параболического уравнения КФП дает единообразное и компактное представление уравнения Беллмана для различных типов управляемых марковских процессов, а различные способы определения решения $\lambda(t, z)$ обратного (сопряженного) уравнения КФП определяют соответственно разные способы построения управления и алгоритмы решения рассматриваемых задач.

Продолжение представлено во второй части статьи.

Список литературы

1. Полосков И.Е. Расширение фазового пространства в задачах анализа дифференциально-разностных систем со случайным входом // Автоматика и телемеханика. 2002. № 9. С. 58-73.
2. Родницев Н.Е. Оптимизация управления нелинейных стохастических систем с ограничениями // Автоматика и телемеханика. 2001. №2. С. 87-100.
3. Родницев Н.Е. Необходимые условия оптимальности управления разрывных нелинейных стохастических систем с ограничениями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2001. № 6. С. 38-50.