УДК 517.977

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВ II

Н.Е. Роднищев
Казанский национальный исследовательский технический университет – КАИ им. А.Н. Туполева
Россия, 420111, Казань, ул. К. Маркса, 10
E-mail: nrodnishev@yandex.ru

Ключевые слова: оптимальное управление, стохастическая система, запаздывание, ограничения, семиинварианты.

Аннотация: Рассматривается задача оптимального управления в нелинейных стохастических системах с запаздыванием и ограничениями типа неравенств на основе семиинвариантов марковского процесса, описываемого стохастическими дифференциальными уравнениями.

1. Введение

Использование полученных в части I статьи необходимых условий оптимального управления в стохастических системах требует решения уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка и сопряженного к нему параболического уравнения Беллмана. Однако, как известно, аналитическое решение этих уравнений можно получить только для линейных стохастических систем [1] и лишь в некоторых случаях для нелинейных систем [2, 3]. Поэтому для решения практических задач предлагается использовать приближенные численные методы поиска оптимального управления [4, 5] относительно статистик случайного процесса – семиинвариантов (комулянтов) [6].

2. Оптимизация управления в стохастических системах на основе семиинвариантов

С использованием семиинвариантов проблема синтеза оптимального управления, представленная в части I работы, на отрезке времени $[t_0, t_f]$ последовательно по примыкающим участкам $[t_{q-1}, t_q]$, $q = 1,...,N$ аналогично [4,5] сводится к задаче

(1) $$I_0(u_N) = \int_{\Omega_N} \Phi_0(x_N, a) p(\tau, x_N) dx_N \to \min$$

$$\dot{\omega}_1^{i^k}(t_{k-1}+s) = M\left[A_i^k(t_{k-1}+s,\cdot)\right];$$

$$\dot{\omega}_{11}^{i^k j^m}(t_{k-1}+s) = M\left[\left(x_i^k - \omega_1^{i^k}\right) A_j^m\left(t_{m-1}+s\,\cdot\right) + \left(x_j^m - \omega_1^{j^m}\right) A_i^k\left(t_{k-1}+s\,\cdot\right)\right],\ i^k \neq j^m;$$

(2) $$\dot{\omega}_2^{i^k}(t_{k-1}+s)=2M\left[\left(x_i^k-\omega_1^{i^k}\right)A_j^k\left(t_{k-1}+s,\cdot\right)\right]+M\left[B_{ii}^k\left(t_{k-1}+s,\cdot\right)\right];$$

$$\dot{\omega}_{n_i}^{i^k}(t_{k-1}+s)=n_iM\left[\left(x_i^k-\omega_1^{i^k}\right)^{n_i-1}A_i^k\left(t_{k-1}+s,\cdot\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}n_i\left(n_i-1\right)M\left[\left(x_i^k-\omega_1^{i^k}\right)^{N_i-2}B_{ii}^k\left(t_{k-1}+s,\cdot\right)\right]-$$

$$-\sum_{q_i=1}^{n_i-2}C_{n_i}^{q_i}\left(\dot{\omega}_{q_i}^{i^k}\right)M\left[\left(x_i^k-\omega_1^{i^k}\right)^{n_i-q_i}\right],\ n_i=3,4,\ldots\ s\in\left[0,\tau\right];$$

$$\left(i=1,\ldots,n;\quad j=1,\ldots,n;\ k=1,\ldots N;\ m=1,\ldots,N\right),$$

с начальными условиями

(3) $$\omega_1^{i^1}(t_0+0)=\omega_1^{i^1}(t_0)=c_1,\ \omega_{11}^{i^1j^1}(t_0+0)=\omega_{11}^{i^1j^1}(t_0)=c_2,$$

$$\omega_2^{i^1}(t_0+0)=\omega_2^{i^1}(t_0)=c_3,\ \omega_{n_i}^{i^1}(t_0+0)=\omega_{n_i}^{i^1}(t_0)=c_4$$

и сопряжениями

(4) $$\omega_1^{i^{k+1}}(t_k+0)=\omega_1^{i^k}(t_{k-1}+\tau),\ \omega_{11}^{i^{k+1}j^{m+1}}(t_k+0)=\omega_{11}^{i^kj^m}(t_{k-1}+\tau),$$

$$\omega_2^{i^{k+1}}(t_k+0)=\omega_2^{i^k}(t_{k-1}+\tau),\ \omega_{n_i}^{i^{k+1}}(t_k+0)=\omega_{n_i}^{i^k}(t_{k-1}+\tau),\ (k=2,\ldots,N);$$

с ограничениями на порядок семиинвариантов, как независимых координат вероятностного пространства [5]

(5) $$\omega_{2n_i}^{i^k}(t_N)/(\omega_2^{i^k}(t_N))^{n_i}\geq -K_{2n_i},$$

и функциональными ограничениями

(6) $$I_k\left(u_N\right)=\int\limits_{\Omega_N}\Phi_k\left(x_N,a\right)p\left(\tau,x_N\right)dx_N-b_k\leq 0,\quad k=\left\{1,\ldots,q_0\right\},$$

(7) $$\psi_k(u_N)\leq 0,\ k=\left\{1,\ldots,r_0\right\},\ \mathrm{g}_k(a)\leq 0,\ k=\left\{1,\ldots,m_0\right\}.$$

В соотношениях (2) – (5) используется оператор $M[\cdot]$ математического ожидания, $\omega_1^{i^k}$ представляет апостериорный семиинвариант первого порядка, где верхний индекс i^k обозначает i-ую компоненту вектора состояний на k-ом интервале, а нижний индекс − порядок семиинварианта; $\omega_{11}^{i^kj^m}$ − смешанные (взаимные) апостериорные семиинварианты второго порядка компонент i^k и j^m на интервалах k и m; $\omega_2^{i^k}$ − апостериорные семиинварианты второго порядка; $\omega_{n_i}^{i^k}$, $\omega_{2n_i}^{i^k}$ − апостериорные семиинварианты выше второго порядка; A_i^k и A_j^m коэффициенты сноса на k-ом и m-ом интервалах, B_{ii}^k − коэффициенты диффузии на k-ом интервале; $C_{n_i}^{q_i}$ − число сочетаний из n_i по q_i.

В частности, для набора одноместных и совместных семиинвариантов до восьмого порядка включительно неравенства (6) имеют вид [6]

$$-2(\omega_2^i)-\omega_4^i\leq 0;\ -105\omega_2^i(\omega_2^j)^2-\omega_{24}^{ij}\leq 0;-166214\omega_2^i(\omega_2^j)^3-\omega_{26}^{ij}\leq 0;$$

$$-2\omega_2^i\omega_2^j-\omega_{22}^{ij}\leq 0;-105(\omega_2^i)^2\omega_2^j-\omega_{42}^{ij}\leq 0;-166214(\omega_2^i)^3\omega_2^j-\omega_{62}^{ij}\leq 0;$$

$$-105(\omega_2^i)^3-\omega_6^i\leq 0;\quad -166214(\omega_2^i)^2(\omega_2^j)^2-\omega_{44}^{ij}\leq 0;\quad -166214(\omega_2^i)^4-\omega_8^j.$$

Проблема (1)-(7) представляет собой задачу теории стохастических оптимальных процессов с запаздыванием и ограничениями типа неравенств. Для решения этой задачи можно использовать методы, изложенные, в частности, в [5]. При этом для «замкнутости» постановки задачи (1)-(7) используются рекуррентные соотношения Дашевского для приближенного представления старших моментов через младшие в виде [4]

$$M[x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}] = \sum_{q_1=1}^{m_1} C_{m_1-1}^{q_1-1} \omega_{q_1}^{1} M[x_1^{m_1-1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}]$$
$$+ \sum_{k=2}^{n} m_k \omega_{10..010...0}^{1k} M[x_1^{m_1-1} \ldots x_{k-1}^{m_k-1} x_k^{m_k-1} x_{k+1}^{m_k+1} \ldots x_n^{m_n}].$$

3. Оптимизация закона управления высотой полета самолета

Рассмотрим задачу параметрической оптимизации закона управления высотой полета легкого самолета, совершающего полет на высоте $H = 11000$ м со скоростью $V_0 = 265.68$ м/с (число Маха $M = 0.87$) с учетом влияния турбулентности атмосферы («болтанки») и постоянного запаздывания выходного сигнала приёмника воздушного давления (ПВД).

Будем считать, что скорость полета стабилизирована за счет работы астатического автомата тяги, управление продольным движением происходит посредством руля высоты, а продольное движение самолета описывается уравнениями

$$\Delta\ddot{\vartheta} + c_{\dot{\vartheta}}\Delta\dot{\vartheta} + c_{\dot{\alpha}}\Delta\dot{\alpha} + c_{\alpha}(\Delta\alpha + \Delta\alpha_W) = -c_{\delta}\Delta\delta;$$
$$\Delta\dot{\vartheta} - \Delta\dot{\alpha} = b_{\alpha}(\Delta\alpha + \Delta\alpha_W);\ \Delta\dot{H} = V_0(\Delta\vartheta - \Delta\alpha); \tag{8}$$
$$\Delta\dot{\alpha}_W = -d_{\alpha}\Delta\alpha_W + 0.52\sqrt{2d_{\alpha}}\sigma_{W_y} N(t),$$

где $d_{\alpha} = V_0 / L_{W_y}$. Здесь ΔH − изменение высоты полета самолета, $\Delta\vartheta$ и $\Delta\alpha$ − изменения углов тангажа и атаки, $\Delta\delta$ и $\Delta\alpha_W$ − вариации отклонения руля высоты и дополнительного угла атаки, обусловленного вертикальными порывами ветра с масштабом турбулентности $L_{W_y} = H/2 = 5500$ м и интенсивностью турбулентности $\sigma_{W_y} = 0.4$ м/с; $N(t)$ − стандартный белый шум с единичной интенсивностью $G_N = 1$, а коэффициенты

$$c_{\dot{\vartheta}} = 0.645 \text{ 1/с};\ c_{\dot{\alpha}} = 0.105 \text{ 1/с};\ c_{\delta} = 3.393 \text{ 1/с}^2;\ b_{\alpha} = 0.6316 \text{ 1/с};\ c_{\alpha} = 2.632 \text{ 1/с}^2.$$

Закон управления продольным движением самолета (закон непрерывного автопилота) с учетом постоянного запаздывания $\tau = 0.1$ с сигналов ПВД принимается в виде

$$\Delta\delta = i_{\vartheta}(\Delta\vartheta - \Delta\vartheta_*(t)) + i_{\dot{\vartheta}}\Delta\dot{\vartheta}(t), \tag{9}$$

где при командной вариации высоты $\Delta H_{\text{c}} = \text{const}$, $\delta\Delta H_{\tau}(t) \equiv \Delta H(t-\tau) - \Delta H_{\text{c}}$ и начальном моменте времени $t_0 = 0$ команда вариации угла тангажа формируется по закону

$$\Delta\vartheta_*(t) = -[i_H\ \delta\Delta H_{\tau}(t) + i_{\dot{H}}\ \delta\Delta\dot{H}_{\tau}(t) + q_H \int_0^t \delta\Delta H_{\tau}(s)\, ds] \tag{10}$$

с определением начальной функции высоты полета $\Delta H = \Delta H_0(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [-\tau, 0]$.

Оптимальный вектор параметров автопилота $a = (i_{\vartheta}, i_{\dot{\vartheta}}, i_H, i_{\dot{H}}, q_H)$ в системе управления (8)-(10) определяется из условия минимизации функционала

$$I_0(a) = \int_0^{t_f} M[(\Delta H(s) - \Delta H_{\text{c}})^2]\, ds \to \min. \tag{11}$$

Замкнутая система (8) − (10) без учета запаздывания и возмущений является линейной, начальные значения вектора параметров автопилота естественно были выбраны в области ее устойчивости $A_3\left(A_1 A_2 - A_0 A_3\right) - A_4 A_1^2 > 0$, выделенной коэффициентами $A_0 = 1$; $A_1 = c_{\dot{\vartheta}} + c_{\dot{\alpha}} + b_{\alpha} + c_{\delta} i_{\dot{\vartheta}}$; $A_2 = b_{\alpha}(c_{\dot{\vartheta}} + c_{\delta} i_{\dot{\vartheta}}) + c_{\alpha} + c_{\delta} i_{\vartheta}$; $A_3 = b_{\alpha} c_{\delta} i_{\vartheta}$, $A_4 = b_{\alpha} c_{\delta} i_H V_0$ характеристического уравнения замкнутого контура управления.

При решении задачи стохастической параметрической оптимизации рассматриваемой системы по критерию (11) с учетом запаздывания сигналов ПВД на основе семиинвариантов по последовательно примыкающим участкам $[t_{q-1}, t_q]$, $q = 1, \ldots, N$, $t_N = t_f = 30$ с определены следующие коэффициенты оптимального закона управления:

$$i_\vartheta = 2.1881;\ i_{\dot\vartheta} = 1.4999;\ i_H = 0.0194;\ i_{\dot H} = 0.0267;\ q_H = 0.000308.$$

Математические ожидания основных координат в переходном процессе представлены на рис. 1-3. Так, на рис. 1 приведен переходной процесс изменения высоты до заданного значения вариации $\Delta H_c = 10$ м. При этом одновременно происходят переходные процессы по углам атаки $\Delta\alpha$ и тангажа $\Delta\vartheta$, что представлено на рис. 2 и 3. Представленные результаты показывают, что в канале высоты время регулирования уменьшилось в пять раз, но даже небольшое запаздывание в непрерывной модели продольного движения самолета вносит существенное уменьшение демпфирования в контуре управления, что приводит к колебательным процессам по всем координатам. Здесь цифрой 1 (синий цвет) обозначены характеристики, соответствующие оптимальным параметрам автопилота в детерминированной модели без учета запаздывания, а цифрой 2 (красный цвет) – эти же характеристики, но соответствующие оптимальным параметрам автопилота, полученным для стохастической модели системы с запаздыванием.

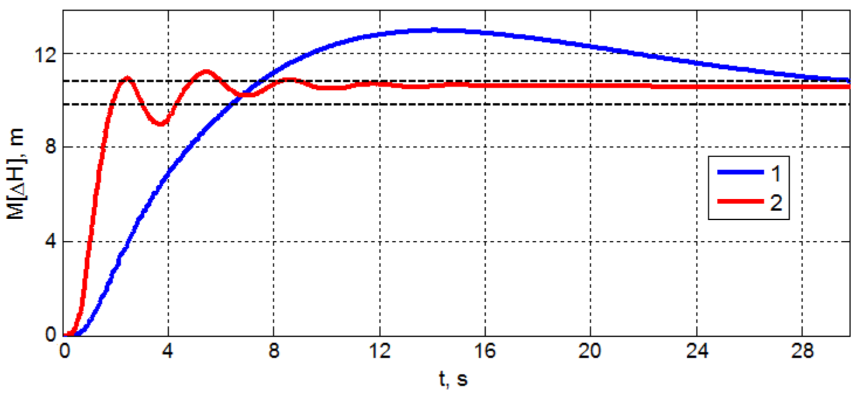

Рис. 1. Изменение среднего значения высоты полета.

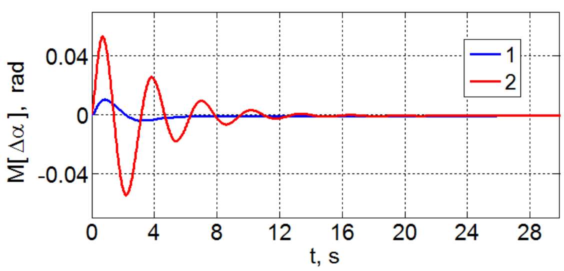

Рис. 2. Изменение среднего значения угла атаки.

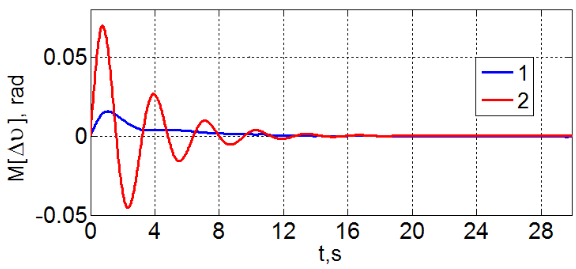

Рис. 3. Изменение среднего значения угла тангажа.

4. Синтез оптимальных цифровых систем управления

В цифровых системах управления физические запаздывания различной длительности проявляется при фильтрации дискретных измерений координат с малым периодом T_q, идентификации и формировании цифрового управления исполнительными органами с периодом $T_u >> T_q$, кратным периоду измерения T_q. Здесь разработаны методы синтеза оптимальных алгоритмов фильтрации, идентификации и управления в линейных системах при стохастических возмущениях с известными статистическими характеристиками [7]-[11]. Различие темпов неполного дискретнбого измерения и цифрового управления с временными запаздываниями в таких системах учитываются с помощью матриц переходов в пространстве состояний [12]. Известны также методы оптимальной адаптивной фильтрации при неполной информации о характеристиках стохастических возмущений [13] и адаптивно-робастной стабилизации линейных непрерывных объектов при неполном дискретном измерении и запаздывании в цифровом управлении [14]. Оптимизация управления в линейных стохастических системах на основе семиинвариантов приводит к таким же результатам, как и указанные выше методы. Это установлено при анализе основных свойств классического фильтра Калмана.

5. Заключение

Сформулированные в части I статьи необходимые условия оптимальности управления в нелинейных стохастических системах с запаздыванием и ограничениями типа неравенств позволяют исследовать широкий класс систем. Аналитические решения уравнений Колмогорова-Фоккера-Планка и Беллмана можно получить только для линейных систем, поэтому для решения практических задач в части II рассмотрена эквивалентная проблема оптимизации управления в нелинейных системах относительно семиинвариантов. В рамках непрерывной модели с запаздывающим аргументом выполнена оптимизация закона управления высотой полета самолета. Кратко рассмотрены проблемы синтеза оптимальных цифровых систем управления при стохастических возмущениях и отмечено, что применение семиинвариантов позволяет эффективно решать задачи оптимизации таких нелинейных стохастических систем.

Список литературы

1. Красовский А.А. Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. М.: Наука, 1974.
2. Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978.
3. Колосов Г.А. Синтез оптимальных автоматических систем при случайных возмущениях. М.: Наука, 1984.
4. Роднищев Н.Е. Приближенный метод поиска оптимального управления нелинейных стохастических систем с ограничениями // Автоматика и телемеханика. 2001. № 3. С. 63-71.
5. Боднер В.А., Роднищев Н.Е., Юриков Е.П. Оптимизация терминальных стохастических систем. М.: Машиностроение, 1987.
6. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Советское радио, 1978.
7. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976.
8. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
9. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. К.Т. Леондеса. М.: Мир, 1980.
10. Иванов В.А., Ющенко А.С. Теория дискретных систем управления. М.: Наука, 1983.
11. Изерман Р. Цифровые системы управления. М.: Мир, 1984.
12. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории линейных дискретных систем управления. М.: Наука, 1985.
13. Кузовков Н.Т., Салычев О.С. Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация. М.: Машиностроение, 1982.
14. Сомов Е.И. Робастная стабилизация упругих космических аппаратов при неполном дискретном измерении и запаздывании в управлении // Известия РАН. Теория и системы управления. 2001. № 2. С. 124-143.