УДК 517.929.4:517.977

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КОНТРОЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Н.О. Седова

Ульяновский государственный университет

Россия, 432017, Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42

E-mail: sedovano@ulsu.ru

Ключевые слова: запаздывание, стабилизация, метод Ляпунова, неавтономная система.

Аннотация: Использование контролирующих функций Ляпунова (control Lyapunov function) является широко известным вариантом прямого метода Ляпунова в применении к задачам управления нелинейными системами, описываемыми автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями. В докладе обсуждаются возможности применения аналогичных идей к задаче стабилизации неавтономных систем с запаздыванием, возникающие при этом особенности и современное состояние проблемы. В качестве базовой конструкции рассматривается как функционал Красовского, так и функция с условиями Разумихина. Для получаемых в результате управлений обоснованы свойства локальной или глобальной стабилизации замкнутой системы, а также рассмотрена известная задача «обратной оптимальности».

Прямой метод Ляпунова, как известно, является мощным и активно используемым средством анализа качественных свойств динамических систем. Стремление распространить эффективность этого подхода на задачи синтеза управления привело к созданию ряда модификаций, среди которых широкое распространение получили так называемые контролирующие функции Ляпунова, предложенные в работах [9,20] для систем, допускающим описание автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Будем обозначать такие функции КЛФ - от оригинального англ. термина CLF – control Lyapunov function.

Хотя, как и в случае классического метода, систематического алгоритма нахождения таких функций не существует, этот подход с успехом применяется ко многим классам нелинейных дифференциальных систем. В работах [9,20] были представлены теоретические обоснования метода КЛФ для автономных обыкновенных дифференциальных уравнений: доказано, что существование КЛФ эквивалентно существованию управления в виде $u = k(x)$ с непрерывной функцией $k(x)$, такого, что положение равновесия управляемой системы глобально асимптотически устойчиво. Вслед за неконструктивным доказательством этого факта в указанных работах появился результат [21], в котором была предложена «универсальная формула» – явное выражение стабилизирующего закона управления через КЛФ для случая, когда управляемая система описывается линейным по управлению уравнением $\dot{x} = f(x) + g(x)u$.

Дальнейшее развитие идеи работы [21] получили в целом ряде работ; см. некоторые результаты в [10]. Для неавтономной системы $\dot{x} = f(t,x) + g(t,x)u$ аналогичный результат получен в [18]: доказано, что существование глобально стабилизирующего (не обязательно равномерно) закона управления вида $u = k(t,x)$ с непрерывной функцией k эквивалентно существованию гладкой КЛФ с определенными свойствами. Связь существования равномерно стабилизирующего закона управления с существованием КЛФ для неавтономной системы изучена в [8]. При этом оказалось, что построенное по известной КЛФ стабилизирующее управление является оптимальным по отношению к некоторому функционалу качества, определяемому по данной КЛФ. Отметим, что каждое управление является оптимальным по отношению к *какому-нибудь* функционалу качества (см. [17]), однако если этот функционал наделен определенной структурой (например, является интегральным квадратичным), то свойство оптимальности характеризует затраты на управление, а также обеспечивает дополнительные свойства управляющего воздействия. В частности, это свойство управления играет важную роль в установлении робастности замкнутой системы, что послужило поводом для рассмотрения так называемой обратной задачи оптимального управления ([11, 12, 14, 16, 19]), когда по заданному закону управления требуется определить минимизируемый на этом управлении функционал качества. Эта задача рассматривалась отечественными авторами как составная часть задачи синтеза стабилизирующего управления, в том числе оптимального по отношению к некоторому функционалу качества либо гарантирующего некоторую априорную оценку этого функционала (например, [1, 2, 4, 6, 7]).

Отметим, что основная часть исследований, посвященных этому методу, рассматривает автономные обыкновенные дифференциальные уравнения; лишь несколько публикаций, в которых метод КЛФ применяется к уравнениям с запаздыванием, появилось в последние десятилетия. В докладе обсуждаются особенности применения метода КЛФ к уравнениям с запаздыванием, в том числе неавтономным. Приведем необходимые понятия и базовые идеи метода.

Сначала рассмотрим автономную систему без запаздывания:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u. \tag{1}$$

Здесь R^n — действительное линейное пространство n- векторов с нормой $|\cdot|$, $x = x(t) \in R^n$, $u \in R$ – управление, $f, g \in C(R^n, R^n)$ и $f(0) = 0$, так что при отсутствии управления система допускает нулевое решение.

Требуется построить управление в виде $u(t) = k(x)$ так, что решение $x = 0$ системы (1) (глобально) равномерно асимптотически устойчиво (такое управление будем называть стабилизирующим).

Для удобства используем стандартные обозначения $R^+ = [0, +\infty)$, $\mathcal{K} = \{\sigma \in C(R^+, R^+)$, $\sigma(u)$ строго возрастает и $\sigma(0) = 0\}$. Пусть $V(x) \in C^1(R^n, R^+)$, $V(x) \geqslant \beta(|x|)$ для некоторой $\beta \in \mathcal{K}$, $\beta(s) \to +\infty$ при $s \to +\infty$. Обозначим $L_f V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^\top \cdot f$, $L_g V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^\top \cdot g$ и предположим, что $\inf_{u \in R}\{L_f V + L_g V \cdot u\} < 0$ для всех $x \neq 0$. Функция, удовлетворяющая перечисленным свойствам, называется *контролирующей функцией Ляпунова* (КЛФ).

Определим теперь закон управления в виде

$$k(x) = \underset{u \in R}{\operatorname{argmin}}\{|u| : L_f V + L_g V \cdot u \leqslant -\sigma(|x|)\} \text{ для некоторой } \sigma \in \mathcal{K}.$$

Тогда производная функции V в силу системы (1) отрицательно определена, и нулевое решение системы (1) (глобально) равномерно асимптотически устойчиво.

В зависимости от выбора «параметра» σ получаются различные законы управления.

Далее используем также следующие обозначения: $r > 0$ – фиксированная постоянная, $C := C([-r, 0], R^n)$ – пространство функций φ с нормой $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(s)| : -r \leqslant s \leqslant 0\}$. Если $x(t) \in C([\alpha - r, \alpha + \beta), R^n)$ ($\alpha \in R^+$, $\beta > 0$), то элемент $x_t \in C$ для каждого $t \in [\alpha, \alpha + \beta)$ определяется равенством $x_t(s) = x(t + s)$, $-r \leqslant s \leqslant 0$.

Рассмотрим теперь нелинейную управляемую систему с запаздыванием вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) + g(t, x_t)u, \tag{2}$$

где функционалы $f, g \in C(R^+ \times C, R^n)$ $u \in R$ – управление, и $f(t, 0) = 0$ для всех $t \in R^+$.

Требуется построить стабилизирующее управление для системы (2) в виде $u(t) = k(t, x_t)$.

В соответствии с двумя существующими вариантами прямого метода Ляпунова для систем, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего типа, распространение метода КЛФ на систему вида (2) возможно как основе вспомогательной функции, так и с использованием функционала.

Рассмотрим функционал $V : R^+ \times C \to R^+$.

Элемент φ пространства C можно представить в виде пары $(\varphi(0), \psi)$, $\psi(s) \in C([-r, 0), R^n)$, $\psi(s) = \varphi(s)$ при $s \in [-r, 0)$, составляющие которой «отвечают» за текущее состояние и предысторию соответственно. Используем обычные определения частных производных $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial \varphi(0)}$, а также инвариантную производную по функциональной составляющей $\partial_\psi V$ [3] (предполагаем, что эти производные существуют и непрерывны в области определения функционала – это предположение выполняется для большинства функционалов, традиционно используемых при исследовании устойчивости). В этом случае производная функционала V вдоль траекторий системы (2) равна $\dot{V}(t, \varphi) = \frac{\partial V(t,\varphi)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(t,\varphi)}{\partial \varphi(0)}\right)^\top \cdot \big(f(t, \varphi) + g(t, \varphi) \cdot u\big) + \partial_\psi V(t, \varphi)$.

По аналогии с традиционными обозначениями положим $L_f V(t, \varphi) = \frac{\partial V(t,\varphi)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(t,\varphi)}{\partial \varphi(0)}\right)^\top \cdot f(t, \varphi) + \partial_\psi V(t, \varphi)$, $L_g V(t, \varphi) = \left(\frac{\partial V(t,\varphi)}{\partial \varphi(0)}\right)^\top \cdot g(t, \varphi)$.

Предположим, что множество $\{(t, \varphi) : \ L_g V(t, \varphi) = 0\} = R^+ \times N$, $N \subset C$.

Функционал $V : R^+ \times C \to R^+$ назовем контролирующим функционалом Ляпунова-Красовского (КЛКФ) для системы (2), если существуют такие функции $\alpha \in \mathcal{K}$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{K}_\infty$, что для всех $(t, \varphi) \in R^+ \times C$

$$\beta_1(|\varphi(0)|) \leqslant V(t, \varphi) \leqslant \beta_2(\|\varphi\|),$$

и для всех $(t, \varphi) \in R^+ \times N$

$$L_f V(t, \varphi) \leqslant -\alpha(|\varphi(0)|).$$

Заметим, что в работе [15] предлагается определение КЛКФ фиксированной структуры для автономной системы специального вида; это позволяет выписать формулу для $L_f V$ в явном виде без обращения к понятию инвариантной производной. Рассмотренное же определение не накладывает подобных ограничений ни на правую часть системы, ни на структуру функционала.

На основе КЛКФ удается определить законы управления, аналогичные известным «универсальным формулам» для обыкновенных дифференциальных уравнений, обосновать их стабилизирующие свойства и робастность по отношению к некоторым типам неопределенностей, а также получить некоторые результаты, относящиеся к задаче «обратной оптимальности». При этом необходимо учесть ряд особенностей и ограничений, связанных с зависимостью используемых конструкций от времени и от запаздывающих состояний системы.

Другим вариантом обобщения КЛФ на случай уравнений с запаздываем является контролирующая функция Ляпунова-Разумихина (КЛРФ).

Она определяется по аналогии с КЛКФ с учетом условий, формулируемых теперь уже в терминах конечномерных функций и обеспечивающих асимптотическую устойчивость нулевого решения уравнения с запаздыванием. Например, в работах [13, 15] КЛРФ определяется в соответствии с классической теоремой об асимптотической устойчивости [5]:

Функция $V \in C^1(R^+ \times R^n, R^+)$ является КЛРФ для системы (2) , если существуют функции $\alpha, p \in \mathcal{K}$, $p(s) > s$ для $s > 0$, $\beta \in \mathcal{K}_\infty$ такие что

$$V(t, x) \geqslant \beta(|x|),$$

(3) $\qquad L_f V(t, \varphi) \leqslant -\alpha(|\varphi(0)|)$ на множестве

$$\tilde{N} = \{\varphi \in N : \, p(V(t, \varphi(0))) \geqslant \max_{-r \leqslant s \leqslant 0} V(t + s, \varphi(s))\}$$

Заметим, что функция V здесь зависит от конечномерного вектора, и $L_f V(t, \varphi) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}(t, \varphi(0))\right)^\top \cdot f(t, \varphi)$.

С одной стороны, функция представляет собой более простую конструкцию по сравнению с функционалом. С другой стороны, наличие дополнительного условия (3) (аналог условия Разумихина) не позволяет утверждать, что функция V будет убывать на множестве N вдоль каждого решения системы. Это приводит к тому, что большинство аналогов «универсальных» формул для управления могут приводить к разрывным или неограниченным функциям и оказываются в общем случае неприменимыми.

Рассмотренные выше определения основаны на классических условиях асимптотической устойчивости, выраженных в терминах функции или функционала Ляпунова. Возможно использование модифицированных достаточных условий, что приводит к соответствующим изменениям в требованиях, предъявляемых к контролирующему функционалу (функции) и его производной вдоль решений системы и позволяет расширить класс допустимых конструкций. Результаты такого рода также обсуждаются в докладе и иллюстрируются примерами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-41-730022).

Список литературы

1. Андреев А.С., Безгласный С.П. О стабилизации управляемых систем с гарантированной оценкой качества управления // ПММ. 1997. Т. 61, Вып. 1. С. 44-51.

2. Бобцов А.А., Ефимов Д.В., Сергеев К.А. К задаче стабилизации нелинейных афинных систем // В кн. «Навигация и управление движением» (материалы 3-ей конференции молодых ученых). СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2001. С. 113-122.
3. Ким А.В. i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: УрО РАН, 1996.
4. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. М.: Наука, 1977.
5. Разумихин Б.С. Устойчивость эредитарных систем. М.: Наука, 1988.
6. Румянцев В.В. Об оптимальной стабилизации управляемых систем // ПММ. 1970. Т. 34, Вып. 3. С. 440-456.
7. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.
8. Albertini F., Sontag E.D. Continuous control-Lyapunov functions for asymptotically controllable time-varying systems // Internat. J. Control. 1999, Vol. 72, No. 18. P. 1630-1641.
9. Artstein Z. Stabilization with relaxed controls // Nonlinear Analysis, Theory, Methods, and Applications. 1983. Vol. 7, No. 11. P. 1163-1173.
10. Freeman R.A., Kokotovic P.V. Robust Control of nonlinear systems. Boston: Birkhauser, 1996.
11. Freeman R.A., Primbs J.A. Control Lyapunov functions: new ideas from an old source // Proceeding of the 35th IEEE Conference on Decision and Control. Kobe, Japan, 1996. P. 3926-3931.
12. Hamzi B. Some results on inverse optimality based designs // Systems Control Letters. 2001. Vol. 43. P. 239-246.
13. Jankovic M. Control Lyapunov-Razumikhin functions and robust stabilization of time delay systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 2001. Vol. 46. P. 1048-1060.
14. Jankovic M. Control of nonlinear systems with time delay // Proceeding of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control. Maui, Hawaii USA. 2003. P. 4545-4550.
15. Jankovic M. Extension of control Lyapunov functions to time-delay systems // Proceeding of the 39th IEEE Conference on Decision and Control. Sydney, Australia, 2000. P. 4403-4408.
16. Jankovic M., Sepulchre R., Kokotovic P.V. CLF based designs with robustness to dynamic input uncertainties // Systems and Control Letters, 1999. Vol. 37. P. 45-54.
17. Kalman R.E. When is a linear control system optimal? // Trans. ASME. Ser. D: J. Basic Eng. 1964. Vol. 86. P. 1-10.
18. Karafyllis I., Tsinias J. A converse Lyapunov theorem for non-uniform in time global asymptotic stability and its application to feedback stabilization // SIAM J. of Control and Optimization. 2003. Vol. 42, No. 3. P. 936-965.
19. Sepulchre R., Jankovic M., Kokotovic P.V. Constructive Nonlinear Control. London: Springer, 1997.
20. Sontag E.D. A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability // SIAM Journal on Control and Optimization. 1983. Vol. 21. P. 462-471.
21. Sontag E.D. A universal construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization // Systems & Control Letters. 1989. Vol. 13. P. 117-123.