УДК 519.86+621.391.1

О ВОЗМОЖНОСТИ ТОЧНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЦЕН НЕФТЕГАЗОВЫХ РЫНКОВ

С.Ю. Жолков
РГУ нефти и газа (НИУ) им. И.М. Губкина
Россия, 119991, Москва, Ленинский просп., 65
E-mail: sergei_jolkov@mail.ru

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения; стохастическая теория управления портфелем активов; модель Блэка–Мертона–Шоулза; статистика нефтяных рынков; адекватная адаптивная модель; инвестиционные проекты освоения месторождений нефти и газа.

Аннотация: На основании анализа всех известных данных ежедневных торгов на нефть обосновывается возможность построения точной (с квадратичным отклонением модели от реальной динамики актива не более 9%) адаптивной модели, основанной на стохастическом «переключении» моделей Блэка–Мертона–Шоулза. Поскольку методы стохастической теории управления портфелем активов могут быть применены для создания инвестиционных проектов освоения месторождений нефти и газа (так называемые "реальные опционы") методы и формулы управления портфелем активов становятся весьма актуальными и для решения задач инвестиционного анализа

Как известно, так называемое «общее мнение» экономистов на возможность точного моделирования и прогноза цен на нефть и газ кардинально менялось в ходе развития экономической мысли и практики. В настоящее время доминирует представление о невозможности сколь-нибудь точного моделирования и прогнозирования цен на нефть.

Бесспорно, проблема точного моделирования нефтяных цен сложна. Неудивительно, что общепринятые попытки определить численную зависимость цен от значимых «ценообразующих факторов» (как причин изменения цен), в числе которых есть абсолютно субъективные и антиэкономические (действия неуравновешенных политических «игроков» и проч.), которые невозможно предсказать, не приводят к цели. Эту проблему нужно решать, исходя из совершенно иных принципов. В основу анализа следует положить другой принцип, сформулированный И. Ньютоном. Он предлагал «делать заключения из явлений, не измышляя гипотез, и выводить причины из действий» [1, с.280] – в соответствии с этим анализу нужно подвергнуть сами цены, в предположении, что они неявно включают в себя все причины, т.е. ньютоновскими «действиями» является сама статистика цен. Проблему следует переформулировать так: когда и насколько точно мы можем моделировать и прогнозировать динамику цен?

Обычная модель безарбитражного (B,S)-рынка с непрерывным временем – модель Блэка–Мертона–Шоулза (BMS-модель) [2, с.345,912]. В ней динамика неслучайного актива (банковского счета) $B = (B_t)_{t\geq 0}$ описывается уравнением $dB_t = rB_t\, dt$, а динамика цены случайного актива $S = (S_t)_{t\geq 0}$ описывается стохастическим дифференциальным уравнением (Ито) $dS_t = S_t\,(\mu\, dt + \sigma\, dw_t)$. Из формулы стохастического дифференциала Ито [2. §3d; 3.§12.2] следует, что процесс $S_t = S_0 e^{H(t)}$, где $H(t) = \left((\mu - \sigma^2)/2\right)t + \sigma w_t$, будет решением этого (последнего) уравнения. Однако анализ реальной статистики рынка показал, что BMS-модель неадекватна реальной динамике цен.

В качестве «a priori напрашивающегося усовершенствования» Ширяев предлагает [2, с. 346] модель $dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dw_t)$ с переменными коэффициентами, рассмотренную Р. Мертоном [4] и Б. Дюпайром (B. Dupire) [5]. Но поскольку свободная мультипликация (повторение в то же время с теми же условиями) рыночных торгов невозможна, неясно, как найти функции $\mu(t)$ и $\sigma(t)$, адекватные реальной динамике цен.

Анализ реальных цен на нефть за 1999–2006 гг. позволил сформулировать гипотезу: вся статистика цен может быть разбита на «периоды стабильности» (не стационарности!), где коэффициенты постоянны, но начальная и конечная точки периодов случайны – зависят от S_t [6]. Таким образом, μ и σ случайны: $\mu = \mu(\omega, t, S_t), \sigma = \sigma(\omega, t, S_t)$.

На основании анализа всего интервала официальной статистики (Рис.1) ежедневных цен-spot на сырую нефть марки Brent с 08.07.1988 по 03. 03.2016 (котировки официально устанавливаются (http://www.platts.com/) информационно-аналитическим агентством Platts (Platt), Mc-Graw Hill Financial) статистика цен была разбита (в результате нахождения «точек разлома», причем различные методы дали примерно одинаковый результат) на 17 периодов стабильности [7; 8].

Рис. 1. Ежедневная статистика Platts Dated Brent 08.07.1988–03.03.2016.

Эта модель была названа [8] обобщенной моделью Дюпайра (правда, не все мои коллеги находят это название удачным). Для исследования близости модели реальному рынку выбраны 3 (из 7 рассматривавшихся) основные характеристики адекватности (индикаторы близости), см. [8]. Была разработана специальная процедура (в ней тонким образом задействованы несколько тысяч траекторий модели), выдающая *аппроксимирующие* траектории на каждом периоде стабильности, которые являются оптимальными в смысле индикаторов близости.

Вычисление таких траекторий основано на предварительных оценках параметров $a = \mu - \sigma^2/2$ и σ^2, но не на всех точках интервала, а лишь на начальных, образующих интервал, названный *базой*. Из чисто умозрительных соображений многие экономисты считают наиболее стабильным (и долгим) рост цен на интервале 2002–2006 гг. В самом деле, разбиение выделяет период 16.01.02– 31.07.06 как 9-й стабильный период.

Приведем графики процесса аппроксимации (рис. 2) на нем (на других см. [7; 8]).

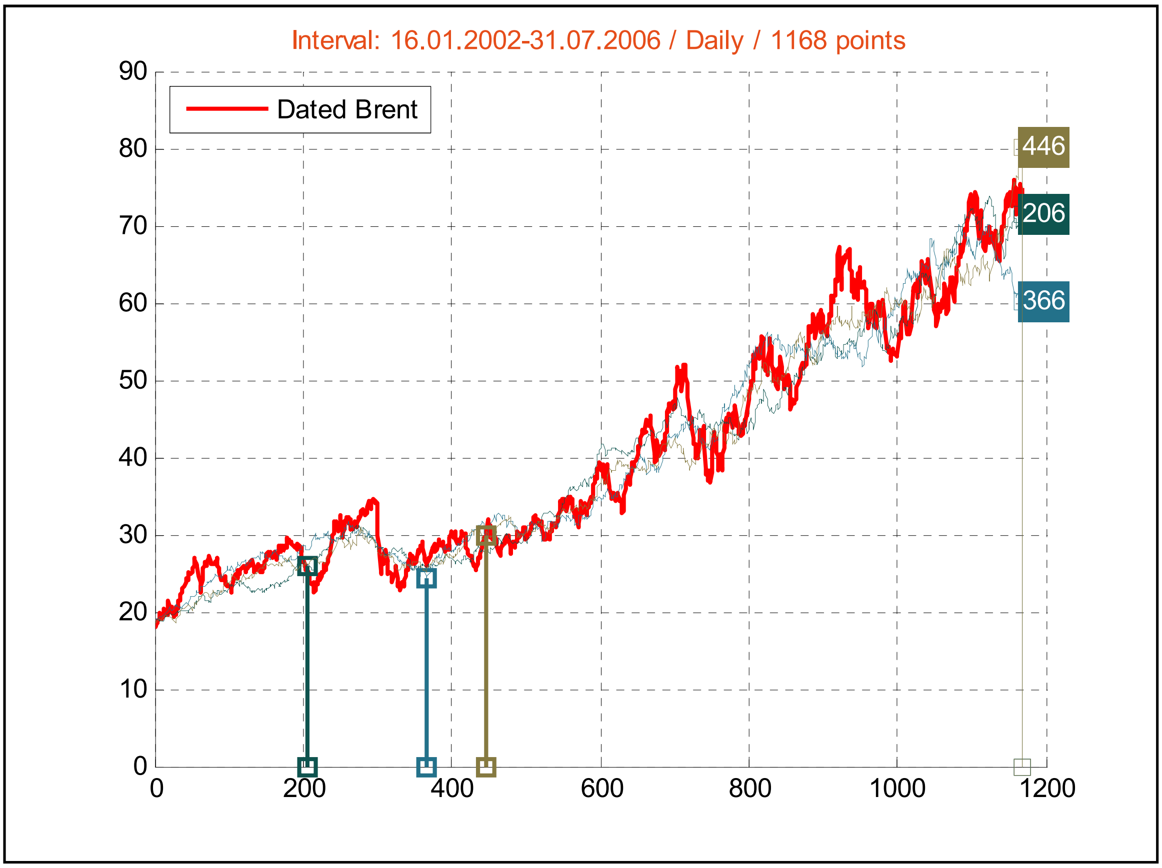

Рис. 2. Стабилизация аппроксимирующей траектории на 9-м периоде (красным – реальные цены).

446-я модельная траектория задает базу и имеет на ней относительное среднеквадратичное отклонение $qd(x_t) = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T}\left(\frac{x_t - x_t^0}{x_t^0}\right)^2$ меньше 9%. Причем, после базы оптимальная траектория оставалась неизменной. И так на всех периодах. Из 17-ти периодов только на трех оптимальная траектория дает отклонение меньше 9% с более чем 18% начальных точек (т.е. дней периода) [8]. Таким образом, оптимальная аппроксимация происходит примерно с 1/6 части периода (длина базы в 9-м периоде далеко не самая короткая). Если мы поставим целью достичь не 9-ти, а 10% точности, результаты будут еще лучше.

Гипотеза о возможности применения разработанных методик разбиения на стабильные периоды и универсального алгоритма построения оптимальной аппроксимирующей траектории подтвердилась при расширении интервала аппроксимации с 1999–2006 до 1988–2016. Есть все основания полагать, что так будет и далее. Действительно, исследование с 2016 по 2018 гг. дает такие же результаты, подтверждая эту гипотезу.

Применяя построенную модель, мы можем использовать результаты стохастической теории управления портфелем активов для инвестиционных проектов следующим образом. Рассмотрим спекулятивный портфель как стохастическую последовательность $\pi = (\pi_n) = (\beta_n, \gamma_n)_{n\geq 0}$, где каждый β_n – размер капитала, свободного или взятого взаймы, а

γ_n – вектор активов. Капитал портфеля описывается стохастической последовательностью $X^{\pi}=(X_n^{\pi})_{n\geq 0}$, $X_n^{\pi}=\beta_n B_n+\sum_{1\leq i\leq l}\gamma_n^i S_n^i=\beta_n B_n+\gamma_n\cdot S_n$, где стохастическая векторная последовательность (S_n) описывает динамику цен активов, а (B_n) – неслучайный банковский капитал безарбитражного (B, S)–рынка, при этом портфель выбирается самофинансируемым [2, т. 2, гл. 5]. Для непрерывного времени аналогично дискретному задаются безарбитражный (B,S)-рынок, портфель активов и капитал самофинансируемого портфеля [2, т. 2, гл. 7].

В модели BMS как цена хеджа (рациональная стоимость (европейского) опциона) C, так и капитал хеджирующего портфеля π находятся в явном виде. Если платежная (целевая) функция $f_T=(S_T-K)^+$, то справедлива формула Блэка–Шоулза [2, с. 913]:

$$\mathsf{C}=\mathsf{C}\,(f_T)=S_0\Phi(y(T,S_0))-K\mathrm{e}^{-rT}\Phi(y_{-}(T,S_0)),$$

где $y(t,s)=\left(\ln\frac{s}{K}+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)\Big/\sigma\sqrt{t}$, $y_{-}(t,s)=y(t,s)-\sigma\sqrt{t}$, Φ – стандартная нормальная ф.р.

В модели BMS существует стратегия $\tilde{\pi}=(\tilde{\beta},\tilde{\gamma})$ для которой капитал $X_T^{\tilde{\pi}}$ таков, что $X_0^{\tilde{\pi}}=\mathsf{C}$, $X_T^{\tilde{\pi}}=f_T$. Положим $\mathsf{C}(t,s)=s\,\Phi(y(T-t,s))-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\,\Phi(y_{-}(T-t,s))$. Тогда можно доказать [2, с.916], что соответствующий этой стратегии капитал:

$$X_t^{\tilde{\pi}}=\tilde{\beta}_t B_t+\tilde{\gamma}_t S_t=\mathsf{C}(t,S_t)=S_t\,\Phi(y(T-t,S_t))-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\,\Phi(y_{-}(T-t,S_t)),$$

при этом $\tilde{\gamma}_t=\frac{\partial\mathsf{C}}{\partial s}(t,S_t)=\Phi(y(T-t,S_t))$, $\tilde{\beta}_t=-\frac{K}{B_0}\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(y_{-}(T-t,S_t))$, что для инвестиционных проектов даже важнее формулы Блэка–Шоулза.

Последний принципиальный вопрос: как результаты исследования спекулятивных портфелей использовать для инвестиционного анализа? В серии работ американских экономистов 1988–2000 гг. (ссылки в [6]) для исследования проектов разработки нефтегазовых месторождений был предложен метод так называемых реальных опционов. Краткое обсуждение правомерности этого подхода в [6].

Отметим, идея американских экономистов о разделении затрат на детерминированные (постоянные и переменные) и стохастические, оцениваемые "реальными опционами", представляется разумной и обоснованной, однако важнее другое – рациональную цену опциона можно рассматривать как минимальные затраты (инвестиции) для получения запланированной функции прибыли в проекте разработки месторождения, а динамику оптимального хеджирующего портфеля как оптимальную динамику затрат и доходов инвестиционного проекта. Указанные выше формулы позволяют давать количественные оценки. Заметим, разные по природе процессы могут описываться одной математической моделью, так что, рассматриваемая ситуация отнюдь не уникальна.

Таким образом, внутри каждого стабильного периода мы можем построить достаточно точную модель, используя данные только с начального интервала в 1/6 – 1/5 часть периода. Но когда начнется новый период, все оценки придется пересчитывать.

Пока в существующих правилах и регуляторах ценообразования и торгов не произойдут кардинальные изменения, есть все основания считать, что описанный выше подход и разработанные методики и универсальные алгоритмы позволят давать достаточно точные количественные оценки для среднесрочных инвестиционных проектов. Имеющаяся (весьма обширная) статистика и появляющиеся новые данные не дают пока никаких оснований для опровержения этого тезиса.

Список литературы

1. Ньютон И. Оптика или трактат об отражениях, преломлениях, изгибаниях и цветах света. М.: Гостех-издат, 1954.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998.
3. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975.
4. Merton R.C. Theory of rational option pricing. // Bell Journal of Economics and Management Science. 1973. No. 4. P. 141-183.
5. Dupire B. Model Art //RISK-magazin. 1993. Vol. 6. P. 118-124; Pricing with a smile // RISK-magazin. 1994. Vol. 7, No. 1. P. 18-20.
6. Жолков С.Ю. Об инвестиционном анализе нефтегазовых проектов, связанном с реальными опционами // Тр. V межд. конф. «Упр. разв. крупномасштабн. систем (MLSD'2011)». Т. I. М.: ИПУ РАН, 2011. С. 117-119.
7. Коршунов А.А. О модели стохастических динамических систем с квадратичным отклонением не более 9% и ее применении в инвестиционных проектах // Журнал радиоэлектроники. 2015. № 12.
8. Жолков С.Ю. Универсальный алгоритм моделирования всей известной динамики нефтяных цен с отклонением менее 9%. // Тр. Межд. конф. «Теория активных систем-2016» (ТАС-2016). М.: ИПУ РАН, 2016. С. 213-217.