

ВЫЯВЛЕНИЕ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО ЭМПИРИЧЕСКИМ ДАННЫМ

Ю.А. Полунин

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: polunin@expert.ru

Ключевые слова: нелинейные процессы, модели взаимосвязанных нелинейных процессов, определение параметров моделей по эмпирическим данным, оценка точности моделей.

Аннотация: Для анализа эмпирических данных нелинейных процессов с целью выявления ситуаций, когда на процессы действуют одинаковые факторы, предлагается использовать модели взаимодействия в виде нелинейных отображений. Под взаимодействием понимается воздействие на процессы одного и того же ограничения. Предлагается метод, когда на основании эмпирических данных за три временных периода можно оценить степень взаимосвязанности процессов по точности определения значения процесса, не используемого для определения параметров модели. Применение метода и моделей продемонстрировано на примерах выявления взаимосвязей в динамике выручки различных групп российских компаний и анализе динамики доллара и евро.

Предлагается метод анализа социально-экономических процессов, имеющих следующие общие закономерности:

- измерения процессов дискретны - это специфика большинства процессов как социальных, так и экономических;
- процессы развиваются в условиях ограничений, в силу влияния ограничений процессы имеют нелинейный характер;
- приращения процессов зависят от текущего состояния с поправкой на влияние ограничений;
- возможны ситуации, когда анализируемые процессы развиваются в среде, где есть взаимосвязи нескольких процессов.

Будем называть процессы взаимосвязанными, если они развиваются под воздействием одного и того же ограничения. В случае однородной среды эти ограничения связаны с воздействием одинакового фактора или группы факторов. Как правило, в ходе качественного анализа нескольких одновременно развивающихся процессов выдвигаются предположения о воздействующих факторах, но безо всякой их количественной проверки. Предлагаемые методы позволяют на основе эмпирических данных оценить справедливость гипотез об одновременном воздействии факторов на несколько анализируемых процессов, приводящих к взаимосвязанности.

Поскольку процессы с дискретным временем, то рационально в качестве моделей взаимосвязанностей, отражающих сформулированные выше общие закономерности процессов, применить нелинейные отображения, связывающие значения процессов во времени $x_{n+1} = f(x_n)$.

Будем использовать термин «отображения» как это принято в нелинейной динамике, строго их следует рассматривать как итерируемые или дискретные отображения [1]. Воспользуемся для анализа моделями в виде нелинейных отображений, предложенных в [2], но в несколько более сложном виде, соответствующем взаимосвязи трех процессов:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + X_n A (K - X_n - Y_n - Z_n), \\ Y_{n+1} &= Y_n + Y_n B (K - X_n - Y_n - Z_n), \\ Z_{n+1} &= Z_n + Z_n C (K - X_n - Y_n - Z_n), \end{aligned}$$

где X_{n+1} , Y_{n+1} , Z_{n+1} – значения соответственно трех процессов на шаге «n+1», A , B , C – интенсивности каждого из процессов при отсутствии ограничений, K – ограничение процессов. Выражение в скобках описывает влияние ограничений при взаимосвязи процессов.

Если по каждому из процессов есть три совпадающих во времени измерения (X_0, X_1, X_2 , Y_0, Y_1, Y_2 и Z_0, Z_1, Z_2), то имеется избыточная информация для определения параметров отображений, и их можно определить несколькими способами. Можно трижды определить каждый из параметров отображений, используя каждый раз по три значения одного из процессов и по два значения других процессов. Если процессы строго взаимодействующие, то все три оценки по каждому из параметров должны совпасть (индекс у каждого параметра соответствует номеру процесса в котором используются все три значения): $A_1 = A_2 = A_3$; $B_1 = B_2 = B_3$; $C_1 = C_2 = C_3$; $K_1 = K_2 = K_3$. Получить такие оценки для расчетов по трем значениям первого процесса мы можем с использованием следующих соотношений:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{X_1^2 - X_0 X_2}{X_0 X_1 (X_1 - X_0 + Y_1 - Y_0 + Z_1 - Z_0)}, \\ K_1 &= \frac{X_1 - X_0}{X_0 A_1} + X_0 + Y_0 + Z_0, \\ B_1 &= A_1 \frac{X_0 (Y_1 - Y_0)}{Y_0 (X_1 - X_0)}, \\ C_1 &= A_1 \frac{X_0 (Z_1 - Z_0)}{Z_0 (X_1 - X_0)}. \end{aligned}$$

Расчетные формулы для второго и третьего процесса аналогичны, они получаются заменой соответствующих переменных: для расчетов по второму процессу надо взять три значения Y_0, Y_1, Y_2 , для третьего варианта расчетов – три значения Z_0, Z_1, Z_2 .

Мы получили исходные значения параметров, на основании которых можно проводить оценку взаимосвязанности процессов. В качестве первого шага необходимо рассмотреть условие взаимосвязанности процессов. Как следует из определения взаимосвязанные процессы развиваются под влиянием одного и того же ограничения. Соответственно, надо сравнить оценки ограничений процессов K_1, K_2, K_3 , полученные для трех вариантов расчетов, рассматривая их близость, как необходимое условие взаимосвязанности. В качестве оценки точности описания взаимосвязи целесообразно взять относительное отклонение оценки процессов от медианны.

Мы получили часть оценок точности рассматриваемых моделей. Какую величину отклонений считать удовлетворительной для дальнейшего анализа необходимо решать в каждом конкретном случае, это зависит от целей анализа.

Но сравнения одних оценок ограничений недостаточно что бы всесторонне оценить степень взаимосвязанности процессов: маловероятно что, сравнивая напрямую остальные параметры моделей реальных процессов мы получим точные совпадения – шум сделает оценки размытыми. Предлагается воспользоваться другим подходом, базирующемся на следующем рассуждении: пусть мы получили оценки параметров отображений на основании трех значений первого процесса X_0, X_1, X_2 и с использованными двух значений второго процесса Y_0, Y_1 . При строгой взаимосвязи мы

должны получить точное значение третьего неиспользованного значения второго процесса Y_2 рассчитав его на основании параметров B_1 и K_1 , полученных на основании полных данных первого процесса. Если процессы не строго взаимосвязаны, то расчётного значения третьего значения второго процесса \widehat{Y}_2 будет отличаться от действительного значения Y_2 . Тогда расхождение значений, в процентах от действительного, мы можем рассматривать, как точность описания процессов нашими моделями, примененными в предположении взаимосвязанности. Таким образом, в качестве достаточного условия применения моделей можно взять значение точности $Q_{12}(\%)$, описания процессов в процентах от действительного значения Y_2 . Это рассчитывается следующим образом:

$$Q_{12}(\%) = \frac{Y_2 - \widehat{Y}_2}{Y_2} 100,$$

где Q_{12} разность действительного и расчетного значений второго процесса (в индексе первая цифра означает номер процесса по которому были просчитаны параметры отображения, вторая цифра – номер процесса значение которого рассчитывается). Например, значение второго процесса рассчитывается как:

$$\widehat{Y}_2 = Y_1 + Y_1 B_1 (K_1 - X_1 - Y_1 - Z_1).$$

Оценки точности описания взаимосвязей, рассчитываются попарно для всех комбинаций процессов. Все они должны укладываться в выбранные границы.

При попарных сравнениях возникает очень важный вопрос: «Получаемые оценки получены на основании значений всех трех процессов, что если один из них, например, третий, не является взаимосвязанным с другими? Будут ли его значения искажать оценки взаимосвязанности первого и второго процесса?» Доказано, что значения третьего процесса (является ли он взаимосвязанным или нет) не влияют на оценки точности описания взаимосвязи между первым и вторым процессом.

Доказательство этого не совсем очевидного факта (ведь в расчетные выражения входят значения третьего процесса) достаточно простое. Рассмотрим два первых процесса. Расхождение Q_{12} между рассчитанным по всем значениям первого процесса \widehat{Y}_2 и действительным значением второго процесса Y_2 можно записать в виде

$$Q_{12} = Y_2 - \widehat{Y}_2 = Y_2 - Y_1 - Y_1 B_1 (K_1 - X_1 - Y_1 - Z_1),$$

где K_1 и B_1 – параметры, рассчитанные по трем значениям первого процесса. Нас интересует только влияние значений третьего процесса, поэтому для упрощения выводов будем последовательно исключать члены, безусловно не имеющие значений третьего процесса. После первых исключений осталось выражение, где участвуют значения третьего процесса: $B_1 (K_1 - X_1 - Y_1 - Z_1)$. Подставив K_1 и B_1 и исключив опять члены, не содержащие Z , получим: $-A_1 \left(\frac{X_1 - X_0}{X_0 A_1} + X_0 + Y_0 + Z_0 - X_1 - Y_1 - Z_1 \right)$. Подставив выражение A_1 , получим:

$$-\frac{(X_1^2 - X_0 X_2)(X_0 + Y_0 + Z_0 - X_1 - Y_1 - Z_1)}{X_0 X_1 (X_1 - X_0 + Y_1 - Y_0 + Z_1 - Z_0)} = \frac{(X_1^2 - X_0 X_2)}{X_0 X_1}.$$

После сокращений значения третьего процесса исчезли. То есть, для расчета точности путем вычисления разности теоретического и реального значения второго процесса $Y_2 - \widehat{Y}_2$ значения третьего процесса не используются. Картина связности первого и второго процесса не изменится если мы проведём все расчеты в ситуации для только двух процессов.

Выводы

Применение моделей взаимосвязанности к анализу нелинейных процессов, соответствующих самым общим предположениям о характере их динамики, позволяет описать взаимосвязи количественно, выявляя скрытые закономерности. Полученные прямые оценки параметров моделей позволяют анализировать конкретные ситуации. Для сравнения процессов с разными значениями ограничений возможен в анализе переход к оценкам нормированных интенсивностей процессов. Эти же подходы, наряду с анализом динамики выручки компаний, были успешно применены для выявления взаимосвязей изменения влиятельности государств (результаты предварительные) и анализу динамики курсовой стоимости доллара и евро в РФ.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ №18-01-00619-а «Разработка новых математических методов и междисциплинарных подходов для анализа ряда социогуманитарных проблем».

Список литературы

1. Кузнецов А.П., Савин А.В., Тюрюкина Л.В. Введение в физику нелинейных отображений. Саратов: Научная книга, 2010. 134 с.
2. Полунин Ю.А. Синтез методов нелинейной динамики и регрессионного анализа для исследования социально-экономических процессов // Проблемы управления. 2019. № 1. С. 32-44.