УДК 517.518.453+681.5

ВОЗМУЩЕНИЯ, ПРЕДСТАВИМЫЕ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИМИСЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

Ю.Ф. Орлов
Электростальский институт (филиал) Московского политехнического университета
Россия, 144000, г. Электросталь Московской обл., ул. Первомайская, д. 7
E-mail: yu_orlov@mail.ru

Ключевые слова: ограниченные внешние возмущения, ряды Фурье, абсолютная сходимость.

Аннотация: Исследуется класс полигармонических внешних возмущений, ограниченных по амплитуде. Вначале он суживается до класса функций, представимых рядом Фурье и устанавливается свойство, которым должна обладать функция $f(t)$ для того, чтобы ряд Фурье ее сходился абсолютно. Затем устанавливаются отношения между этими классами.

1. Введение

Универсальных методов решения задач управления, возникающих на практике, не существует. Каждый метод накладывает некоторые ограничения на среду управления, при которых может быть решена им конкретная задача. Так, методы эти условно можно разделить по типу внешнего возмущения на *стохастические* и *детерминированные*. Среди стохастических возмущений, как правило, доминирует «белый шум», а среди детерминированных – произвольные ограниченные функции. При этом если задача решается в частотной области, часто бывает удобно (порой даже необходимо) внешнее возмущение представить неограниченным набором гармоник:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \sin(\omega_k t + \varphi_k), \tag{1}$$

неизвестных частот $\omega_k \in \mathbb{R}$, амплитуд $\rho_k > 0$ и фаз $-\pi/2 < \varphi_k \leqslant \pi/2$. Некоторые задачи могут быть решены выбранным методом лишь при дополнительных ограничениях на параметры функции (1), среди которых часто встречается такое:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k < \infty. \tag{2}$$

Возникает закономерный вопрос о том – что это за класс функций такой? И можно ли представить в нем другие – типовые, в частности, функции? Среди последних конечно же предпочтение отдается возмущениям, взятым из природы. Разрывные, например, функции не интересны потому, что разрывов непрерывности в природе существует, а сигналы с ними не реализуемы на практике.

Ряд (1), назовем *полигармоническим*. Множество всех функций, представимых в виде ряда (1) обозначим через P (polyharmonic), а с ограничением (2) – P_a (absolute).

Среди публикаций, внешние возмущения в которых описаны в классе P_a, можно отметить [1–3], и исследования с таким классом возмущений продолжаются [4, 5]. Поэтому поставленные здесь вопросы актуальны. Настоящая работа является результатом исследования функций из этого класса и призвана дать ответ на эти вопросы.

2. Постановка задачи

Исследование проведем в два этапа. На первом положим, что $\omega_k = k - 1$. Представляя каждую гармонику ряда (1) в виде суммы гармоник, получим ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt), \tag{3}$$

в котором $a_0 = 2\rho_1 \sin\varphi_1$, $a_k = \rho_{k+1}\sin\varphi_{k+1}$ и $b_k = \rho_{k+1}\cos\varphi_{k+1}$. Для него справедлив следующий результат Дирихле:

Теорема 1. *Если функция $f(t)$ непрерывна или кусочно-непрерывна на интервале $(-\pi, \pi)$, то ее ряд Фурье (3) сходится в этом интервале. Сумма ряда равна $f(t)$ в точках, где функция непрерывна и равна $\dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$ в тех точках разрыва непрерывности, в которых существуют правая и левая производные.*

Ограничение (2) запишется в виде:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k = \frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \leqslant \frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}|a_k| + |b_k| < \infty, \tag{4}$$

в котором применительно к (3) важнó лишь последнее неравенство этой цепочки.

Определение 1. *Ряд Фурье (3) с ограничением (4) в этой работе будем называть* ***абсолютно сходящимся****.*

Задача 1. *Установить свойство, которым должна обладать функция $f(t)$ для того, чтобы ряд Фурье ее сходился абсолютно.*

Множество всех функций, представимых в виде ряда Фурье (3) обозначим через F (Fourier), а с ограничением (4) – F_a.

Задача 2. *Установить отношение P (P_a) с F (F_a).*

3. Решение задачи 1

В начале (решения) отобрано было по нескольку простейших представителей от каждого типа функций и разложение их в ряд Фурье исследовано на абсолютную сходимость. В результате исследования такого обнаружилось, что половина из отобранных функций принадлежит классу F_a, а половина – нет. Стало ясно, что оба класса (F_a и $F \setminus F_a$) *не пусты*.

Функция $\sin\omega t$ обратила на себя внимание тем, что при $\omega \notin \mathbb{N}$ она $\in P_a$ и $\notin F_a$. Для того, чтобы выяснить причину такого отношения, решено было разложить гармонику $f(t) = \rho\sin(\omega t+\varphi)$ полигармонического ряда (1) в ряд Фурье на отрезке $[0, T]$:

$$f(t) = \frac{\rho}{\omega T}[\cos\varphi - \cos(\omega T+\varphi)] + \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\rho[\cos\varphi - \cos(\omega T+\varphi)] \times \times \frac{2\omega T}{\omega^2T^2 - 4\pi^2k^2}\cos k\frac{2\pi}{T}t + \rho[\sin(\omega T+\varphi) - \sin\varphi]\frac{4\pi k}{\omega^2T^2 - 4\pi^2k^2}\sin k\frac{2\pi}{T}t\Bigg). \tag{5}$$

Из разложения видно, что для абсолютной сходимости (5) необходимо и достаточно выполнения равенства: $\rho[\sin(\omega T+\varphi) - \sin\varphi] = 0$, а для «абсолютной» расходимости – равенства: $\rho[\cos\varphi - \cos(\omega T+\varphi)] = 0$. Нетривиальные их решения: $\varphi = (\pi - \omega T)/2$ и $\varphi = -\omega T/2$ показали, что за абсолютную сходимость/расходимость ряда (5) отвечает только сдвиг гармоники этой по фазе φ. Тут-же под подозрение попали четность и непрерывность функций. По результатам проверки разложенных ранее функций четность отпала и в виде гипотезы по теореме 1 сформулирована была следующая простая:

Теорема 2. *Если функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, то ее ряд Фурье (3) сходится в этом отрезке абсолютно и сумма этого ряда равна $f(t)$.*

Практический интерес (для инженеров) представляет лишь разложение во времени от нуля и до T включительно. Поэтому, чтобы упростить выкладки дальнейшие, решено было функцию $f(t)$ четным образом продолжить (формально) на отрицательную полуось времени и провести доказательство теоремы 2 по индукции.

Для констант разложение $f(t) = c_0$ в ряд Фурье сходится на выбранном отрезке времени абсолютно. Пусть теперь функция наша состоит из N прямых линий: $f_k(t) = c_k^0 + c_k^1 t$, переходящих друг друга в точках t_k излома функции. При этом $t_0 = 0$ и $t_N = T$. Для нее было доказано следующее:

Утверждение 1. *Разложение в ряд Фурье произвольного числа функций $f_k(t) = c_k^0 + c_k^1 t$ на отрезке $[0, T]$, четным образом продолженное на отрезок $[-T, 0]$, сходится абсолютно если и только если линии эти переходят друг в друга без разрыва непрерывности.*

Следствие 1. *Для того, чтобы разложение в ряд Фурье произвольного числа функций $f_k(t) = c_k^0 + c_k^1 t$ на отрезке $[0, T]$, четным образом продолженное на отрезок $[-T, 0]$, сходилось абсолютно, необходимо и достаточно чтобы оно велось на временны́х интервалах точек пересечения этих функций.*

Инициализация, таким образом, подготовлена. Осталось провести индуктивный переход: если при $f_k(t) = c_k^0 + c_k^1 t + \cdots + c_k^n t^n$ доказано аналогичное 1 утверждение, то доказано оно и для $f_k(t) = c_k^0 + c_k^1 t + \cdots + c_k^{n+1} t^{n+1}$.

Для доказательства самой-же теоремы 2 осталось только представить эти многочлены при $n \to \infty$ в виде соответствующих рядов Тейлора:

$$f_k(t) = f_k(t_k^*) + \dot{f}_k(t_k^*)(t - t_k^*) + \frac{\ddot{f}_k(t_k^*)}{2!}(t - t_k^*)^2 + \cdots + \frac{f_k^{(n)}(t_k^*)}{n!}(t - t_k^*)^n + \cdots,$$

в которых $t_k^* \in [t_{k-1}, t_k]$. $f_k(t)$ в этом случае будут уже произвольными функциями, разложимыми в ряд Тейлора.

4. Решение задачи 2

Выпишем все подмеченные отношения между этими множествами. С одной стороны имеют место очевидные (тривиальные) вхождения: $F_a \subset F$ и $P_a \subset P$. С другой стороны, пример с функцией $\sin \omega t$ при $\omega \notin \mathbb{N}$ говорит о том, что: $F_a \subset P_a$. В свою очередь $F = P(\omega_k = k-1)$, а ряд (1) в ряд (3) разложить нельзя потому, что бесконечные суммы не перестановочны. Поэтому $F \subset P$. Это говорит о том, что отказываться от полигармонического ряда (переходить к ряду Фурье) *нельзя* потому, что необоснованно *сужается* тем самым *класс функций* внешнего возмущения.

Кратность частот в ряде Фурье приводит к тому, что ряд этот имеет периодическое продолжение. В полигармоническом ряде кратности частот не заложено изначально (они могут принимать любые значения из $\mathbb{R}$) и функция, представимая в виде такого ряда, периодического продолжения не имеет по определению.

Всегда нужно исходить из того, что класс внешних возмущений определяется решением поставленной задачи и он должен быть описан в постановке задачи целиком.

Если задача решается для полигармонического ряда, то необоснованно переходить от него к сумме гармоник *нельзя*. Функции (правой части обыкновенного дифференциального уравнения) вида: $\sin$, $\cos$, $\exp$, $\exp(\sin+\cos)$ и их суммы внешним возмущением *не являются* потому, что решение такое имеет ОДУ и без них. Просто порядок его будет больше. Пример: ОДУ вида $\dot{x}+ax = \sin bt$ и $(\ddot{x}+b^2x)(\dot{x}+ax)-bx = 0$ имеют одно и то же решение: $x(t) = \exp at + \sin bt$. Сумма из n гармоник добавит к порядку исходного (с внешним таким возмущением) ОДУ $2n$ производных и объект будет изолирован (не подвержен внешним возмущениям).

5. Пример

В технике часто используется *меандр* – прямоугольная волна, вида:

$$f(t) = \begin{cases} c & \text{при} \quad -\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2, \\ -c & \text{при} \quad -\pi \leqslant t < -\pi/2 \quad \text{и} \quad \pi/2 < t \leqslant \pi. \end{cases} \tag{6}$$

Разложим его в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cos(2k-1)t.$$

В качестве внешнего возмущения (1), (2) использовать разложение это нельзя потому, что не выполняется условие (2):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k = \frac{4c}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2k-1} + \cdots\right) = \infty. \tag{7}$$

Обратим внимание на то, что в точках $\pm\pi/2$ функция (6) имеет разрывы непрерывности, а природа непрерывна. Возмущение физически не может иметь в момент времени $\pi/2$ слева предел, равный значению $c \neq 0$, а справа $-c$ потому, что на изменение значения этого нужно время. Поэтому, зная, что разложение функции $f(t) = |t|$ в ряд Фурье сходится абсолютно, модифицируем ее под меандр и изменяя наклон ее линий (угол в точке пересечения их с осью абсцисс до прямого), получим физически реализуемый аналог математического меандра (6):

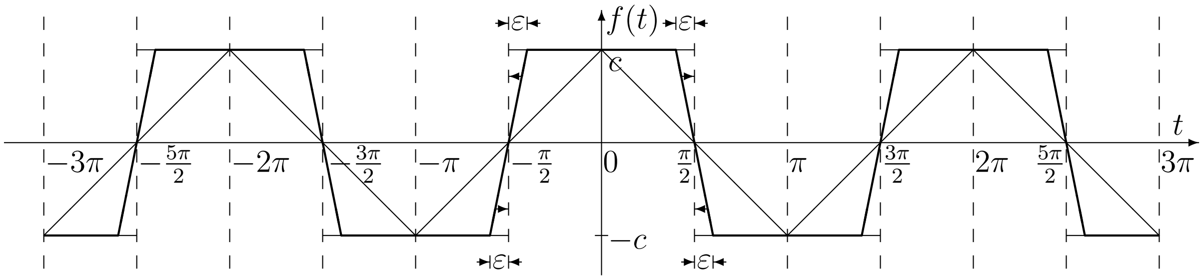

Рис. 1. Получение физического меандра из $f(t) = |t|$.

Сконструируем аналитическое выражение:

$$f(t) = \begin{cases} c & \text{при} \quad -\pi/2 + \varepsilon \leqslant t \leqslant \pi/2 - \varepsilon, \\ \dfrac{c}{\varepsilon}\left|\dfrac{\pi}{2} - t\right| & \text{при} \quad -\pi/2 - \varepsilon < t < -\pi/2 + \varepsilon \quad \text{и} \quad \pi/2 - \varepsilon < t < \pi/2 + \varepsilon, \\ -c & \text{при} \quad -\pi < t \leqslant -\pi/2 - \varepsilon \quad \text{и} \quad \pi/2 + \varepsilon \leqslant t \leqslant \pi, \end{cases}$$

изображенной на рис. 1 функции. Ряд Фурье ее:

$$f(t) = \frac{2c}{\pi\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \Big(\sin(2k-1)(t+\varepsilon) - \sin(2k-1)(t-\varepsilon) \Big)$$

сходится абсолютно при любом значении $\pi/2 \leqslant \varepsilon < 0$. Предельный-же переход (от физического меандра к математическому) вносит неопределенность: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\sin k\varepsilon}{\varepsilon} = \dfrac{0}{0}$, приводящую к разрыву непрерывности в точках $-\pi/2$ и $\pi/2$, который и порождает гармонический ряд (7).

6. Заключение

В настоящей работе установлено, что ограничение (4) выполняется для любой непрерывной кусочно-гладкой функции. Приведен пример разложения такой функции. Установлены отношения классов функций, представимых рядами (Фурье и полигармоническим) и ограничениями на амплитуды их гармоник.

Список литературы

1. Александров А.Г. Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействию. I. Минимально-фазовые одномерные объекты // Автоматика и телемеханика. 2015. № 5. С. 27-42.
2. Александров А.Г. Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействию. II. Неминимально-фазовые одномерные объекты // Автоматика и телемеханика. 2017. № 6. С. 3-17.
3. Chestnov V.N., Shatov D.V. Multivariable Systems Design of Desired Accuracy Based on LQ and H-Infinity Optimization Procedures // Proc. of the 2018 European Control Conference (ECC-2018). Limassol, Cyprus, 2018. P. 2511-2516.
4. Честнов В.Н., Шатов Д.В. Синтез H_∞ регуляторов одномерных следящих систем по инженерным критериям качества // Труды XIII Совещания по проблемам управления. Москва, 17-20 июня 2019 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезниоква РАН, 2019.
5. Честнов В.Н., Шатов Д.В., Лебедев И.А. Синтез дискретных H_∞ регуляторов многомерных систем по инженерным критериям качества // Труды XIII Совещания по проблемам управления. Москва, 17-20 июня 2019 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезниоква РАН, 2019.