УДК 514.7

НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ДИНАМИК

А.А. Горинов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: gorinov.anton@physics.msu.ru

Ключевые слова: эволюционные уравнения, конечномерные динамики.

Аннотация: в докладе представлен метод построения конечномерных динамик для систем нелинейных эволюционных дифференциальных уравнений. Этот метод позволяет находить точные и приближенные решения эволюционных систем и исследовать их на асимптотическую устойчивость.

1. Введение

В задаче рассматривались системы из n эволюционных дифференциальных уравнений с пространственными производными до порядка l включительно:

(1) $$\boldsymbol{U}_t = \boldsymbol{\Phi}\left(x, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}_x, \dots, \frac{\partial^l \boldsymbol{U}}{\partial x^l}\right).$$

Здесь $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{\Phi}$ – вектор-функции размерности n: $\boldsymbol{U} = (u^1, u^2, \dots, u^n)$ и $u^i = u^i(t, x)$, $\boldsymbol{\Phi} = (\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^3)$.

2. Конечномерные динамики

2.1. Определение конечномерных динамик

Система обыкновенных дифференциальных уравнений задает гиперповерхность в некотором пространстве. Векторные поля, переводящие эту гиперповерхность саму в себя называются инфинитезимальными симметриями. Более того, если эти поля сдвигают гиперповерхность не вдоль решений исходной системы уравнений, то они называются тасующими симметриями. **Тасующие симметрии** могут переводить одно решение системы в другое.

Введем систему уравнений $\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}', \boldsymbol{y}'', \dots)$ с производными до порядка k включительно. $\boldsymbol{F}$ – вектор-функция а y – вектор размерности n, определяемый, как $y^i = u^i(t, x)$ с «замороженной» независимой координатой t.

В канонических координатах $x, y_0^1, \dots, y_k^n$ на пространстве k-джетов $\mathrm{J}^{\mathrm{k}}(1, n)$ эту систему можно переписать в следующем виде:

(2) $\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_k).$

Определение 1. [1] *Система уравнений* $\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_k)$ *называется* ***конечномерной динамикой*** *для системы эволюционных уравнений (1), если вектор-функция* $\boldsymbol{\Phi}(x, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_l)$ *является* ***производящей функцией*** *симметрий системы* $\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_k)$.

2.2. Поиск динамик

Система дифференциальных уравнений (2) задает гиперповерхность в пространстве джетов:

(3) $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \{\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_k) = 0\} \subset \mathrm{J}^{\mathrm{k}}(1, n).$

Теорема 1. *Система обыкновенных дифференциальных уравнений (3) является* ***конечномерной динамикой*** *для системы эволюционных уравнений (1), тогда и только тогда, когда*

(4) $\sum_{i=0}^{k} \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}_i} D^i(\boldsymbol{\Phi}) = 0 \; mod \; \boldsymbol{DF},$

где D – оператор полного дифференцирования и DF – дифференциальный идеал алгебры функций на пространстве джетов, порожденный функцией F.

Для двух вектор-функций G и H на пространстве k-джетов $\mathrm{J}^{\mathrm{k}}(1, n)$ введем **скобку Пуассона** [2]:

(5) $[\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}] = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{y}_i} D^i(\boldsymbol{H}) - \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{y}_i} D^i(\boldsymbol{G}) \right).$

Теорема 2. [3] *Система обыкновенных дифференциальных уравнений (3) является* ***конечномерной динамикой*** *для системы эволюционных уравнений (1), тогда и только тогда, когда*

(6) $[\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{F}] = \sum_{i=0}^{l-1} b_i D^i(\boldsymbol{F}),$

где b_i *– матрица* $n \times n$*, состоящая из коэффициет-функций на пространстве джетов.*

Легко увидеть, что левая часть уравнения (4) записана в пространстве $\mathrm{J}^{k+l}(1, n)$, а левая часть уравнения (6) в пространстве $\mathrm{J}^{k+l-1}(1, n)$, так как слагаемые, содержащие джеты наивысшего порядка $\mathrm{J}^{k+l}(1, n)$ согласно (5) равны $\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{y}_l} D^l(\boldsymbol{F}) = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{y}_l} \boldsymbol{y}_{k+l} \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}_k} + \cdots$ и $\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}_k} D^k(\boldsymbol{\Phi}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{y}_k} \boldsymbol{y}_{l+k} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{y}_l} + \cdots$, что в сумме дает 0. Так как для вычислений легче пользоваться более низкими порядками систем, в дальнейших расчетах будем пользоваться теоремой 2 и формулой (6).

3. Построение решений

3.1. Тасующие симметрии

Для нахождения решений системы эволюционных уравнений (1) необходимо построить тасующие симметрии для уравнения (2) с **производящей функцией** $\boldsymbol{\Phi}(x, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_l)$ [3].

Введем формы Картана на пространстве бесконечных джетов $\mathrm{J}^{\infty}(1, n)$ для любого i:

$$\boldsymbol{\Omega}_i = d\boldsymbol{y}_{i-1} - \boldsymbol{y}_i dx,$$

где $\boldsymbol{\Omega}_i = (\omega_i^1, \omega_i^2, \dots, \omega_i^n)$.

Так же введем оператор полного дифференцирования D на $\mathrm{J}^{\infty}(1, n)$, обращающий формы Картана в ноль $\boldsymbol{\Omega}_i(D) = 0$ для любого i:

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{y}_{i+1} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}_i}.$$

Тогда **тасующие симметрии** для системы уравнений (2) будем искать в виде

(7) $$S = \sum_{i=0}^{k} \boldsymbol{a}_i \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}_i},$$

где $\boldsymbol{a}_i$ – вектор, сотоящий из функций коэффициентов на $\mathrm{J}^k(1,n)$. Стоит заметить, что $\boldsymbol{a}_0$ называется **производящей функцией** тасующих симметрий.

Производные Ли дифференциальной формы $\boldsymbol{\Omega}_i$ вдоль векторного поля S определяются следующим соотношением:

$$L_S(\boldsymbol{\Omega}_i) = S \rfloor d\boldsymbol{\Omega}_i + d(S \rfloor \boldsymbol{\Omega}_i).$$

Стоит заметить, что $S \rfloor \boldsymbol{\Omega}_i = \boldsymbol{\Omega}_i(S) = \boldsymbol{a}_{i-1}$. Так же $d\boldsymbol{\Omega}_i = -d\boldsymbol{y}_i \wedge dx$ и как следствие $S \rfloor d\boldsymbol{\Omega}_i = -\boldsymbol{a}_i dx$. Таким образом

(8) $$L_S(\boldsymbol{\Omega}_i) = d\boldsymbol{a}_{i-1} - \boldsymbol{a}_i dx.$$

По определению векторное поле S является **тасующей симметрией** уравнения (2), если

(9) $$L_S(\omega_i^j) = \sum_{r=1}^{\infty} \boldsymbol{b}_{j,r}\, \boldsymbol{\Omega}_r + \boldsymbol{B}_j d\boldsymbol{F}.$$

Здесь $\boldsymbol{b}_{i,r}$ и $\boldsymbol{B}_i$ – некоторые вектор-функции на $\mathrm{J}^k(1,n)$.

Запишем полный дифференциал от произвольной вектор-функции $\mathbf{g} \in C^\infty(\mathrm{J}^k(1,n))$:

$$d\mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} dx + \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{y}_i} d\boldsymbol{y}_i = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} dx + \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{y}_i} (\boldsymbol{\Omega}_{i+1} + \boldsymbol{y}_{i+1} dx)$$
$$= \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} + \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{y}_i} \boldsymbol{y}_{i+1} \right) dx + \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{y}_i} \boldsymbol{\Omega}_{i+1} = D(\mathbf{g}) dx + \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{y}_i} \boldsymbol{\Omega}_{i+1}.$$

Пользуясь полученным результатом, а также уравнениями (8) и (9) получим:

$$L_S(\boldsymbol{\Omega}_i) = D(\mathbf{a}_{i-1}) dx + \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial \mathbf{a}_{i-1}}{\partial \boldsymbol{y}_i} \boldsymbol{\Omega}_{i+1} - \boldsymbol{a}_i dx$$
$$= \boldsymbol{B} \left(D(\boldsymbol{F}) dx + \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}_i} \boldsymbol{\Omega}_{i+1} \right) + \sum_{r=1}^{\infty} \boldsymbol{b}_r\, \boldsymbol{\Omega}_r.$$

Так как мы можем выбрать произвольный $\boldsymbol{b}_r$ на $\mathrm{J}^k(1,n)$, выберем его таким, чтобы $\boldsymbol{b}_{i+1} = \frac{\partial \mathbf{a}_{i-1}}{\partial \boldsymbol{y}_i} - \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}_i}$. В этом случае равенство выше примет следующий вид:

$$\big(D(\boldsymbol{a}_{i-1}) - \boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{B} D(\boldsymbol{F})\big) dx = 0.$$

Вспомним, что $\boldsymbol{a}_i$ является функцией на пространстве $\mathrm{J}^k(1,n)$, а оператор D повышает порядок пространства джетов, получим, что коэффициент при джетах порядка $k+1$ должен быть равен нулю:

$$\frac{\partial \mathbf{a}_{i-1}}{\partial \boldsymbol{y}_k} - \boldsymbol{B} \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}_k} = 0.$$

Отсюда получаем $\boldsymbol{B} = \frac{\partial \mathbf{a}_{i-1}}{\partial \boldsymbol{y}_k} \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}_k} \right)^{-1}$.

Теорема 3. *Инфинитезимальные* ***тасующие симметрии*** *для системы уравнений* $\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_k)$ *с производящей функцией* $\boldsymbol{\Phi}(x, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_l)$ *могут быть записаны в форме* $S = \sum_{i=0}^{k} \boldsymbol{a}_i \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}_i}$, *где вектор-функции* $\boldsymbol{a}_i$ *рассчитываются по рекуррентной формуле*

(10) $$\boldsymbol{a}_i = D(\boldsymbol{a}_{i-1}) - \frac{\partial \boldsymbol{a}_{i-1}}{\partial \boldsymbol{y}_k} \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}_k} \right)^{-1} D(\boldsymbol{F}).$$

3.2. Точные решения

Для нахождения точных решений системы (1), воспользовавшись теоремой 2, выберем конечномерную динамику $\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_k)$.

Для выбранной динамики, согласно теореме 3, строим поле тасующих симметрий (7). Для этого поля находим однопараметрическую группу диффеоморфизмов тасующих симметрий по параметру t. Это позволяет нам выбирать координаты $(x_0, \boldsymbol{y}_0(t))$, причем для каждого значения параметра t выбирается решение системы $\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_k)$, проходящее через задаваемую этим параметром точку $(x_0, \boldsymbol{y}_0)$.

Таким образом в каждой точке с координатами x, t задано решение системы (1), проходящее через точку $x_0, t_0, \boldsymbol{U}_0$.

Список литературы

1. Kruglikov B.S., Lychagina O.V. Finite dimensional dynamics for Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov equation // Lobachevskii J. Math. 2005. Vol. 19. P. 13-28.
2. Akhmetzyanov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V. Attractors in models of porous media flow // Doklady Mathematics. 2017. Vol. 95, No. 1. P. 72-75.
3. Горинов А.А. Конечномерные динамики для систем эволюционных дифференциальных уравнений // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2018): материалы Одиннадцатой международной конференции. М.: ИПУ РАН, 2018. Т. 1. С. 350.
4. Kushner A.G., Lychagin V.V, Rubtsov V.N. Contact geometry and nonlinear differential equations // Encyclopedia Math. Its Appl., Vol. 101. Cambrige: Cambrige University Press.