

УДК 517.958

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ИСТЕКАНИЯ ГАЗА ИЗ СОПЛА (СЛУЧАЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА)

И.С. Красильщик

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Е-mail: josephkra@gmail.com

В.В. Лычагин

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Е-mail: valentin.lychagin@uit.no

Ключевые слова: газовая динамика, идеальный газ, сопло, групповая классификация.

Аннотация: Рассмотрены одномерные уравнения истечения идеального газа из сопла и проведена их групповая классификация в зависимости от входящих в них функциональных параметров.

1. Введение

Методы группового анализа дифференциальных уравнений в частных производных (УрЧП) [1] и, более общо, геометрическая теория этих уравнений [2] являются мощным и эффективным средством качественного исследования УрЧП и построения их точных решений. Ниже эти методы применяются к системе уравнений газовой динамики [3], описывающей истечение одномерного идеального газа.

2. Основные уравнения

Рассмотрим течение газа в одномерной трубе, площадь сечения которой задана функцией $A = A(x)$. Оно описывается системой уравнений Эйлера

$$(1) \quad \begin{cases} A\rho(u_t + uu_x) + p_x = 0 & \text{(сохранение импульса),} \\ (A\rho)_t + (A\rho u)_x = 0 & \text{(сохранение массы),} \\ \sigma_t + u\sigma_x = 0 & \text{(адиабатичность),} \end{cases}$$

где x — пространственная координата, t — время, u — скорость, p — давление, ρ — плотность и σ — энтропия. Уравнения состояния идеального газа имеют вид

$$(2) \quad p = R\rho T, \quad \varepsilon = \frac{n}{2}RT, \quad \sigma = \ln\left(\frac{\varepsilon^{\frac{n}{2}}}{\rho}\right) + \text{const},$$

где T — температура, ε — внутренняя энергия, а R — универсальная газовая постоянная и n — число степеней свободы.

Введём потенциалы φ и ψ , полагая

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_x = -A\rho u, & \varphi_t = p + A\rho u^2, \\ \psi_x = A\rho, & \psi_t = -A\rho u. \end{cases}$$

Тогда

$$u = \frac{\varphi_x}{\psi_x}, \quad p = \varphi_t + \frac{\varphi_x^2}{\psi_x}, \quad \psi_t = \varphi_x,$$

причём функция ψ является первым интегралом векторного поля $\partial/\partial t + u\partial/\partial x$. Поэтому уравнения (1)–(3) равносильны системе

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi_t \psi_x - \varphi_x^2 = A^{-\alpha} F \psi_x^{\alpha+1}, & \psi_x > 0, \\ \varphi_x - \psi_t = 0, \end{cases}$$

где $F = F(\psi)$ — произвольная гладкая функция, а $\alpha = (n+2)/n > 1$.

3. Алгебры симметрий

Мы ищем симметрии системы (4) в виде эволюционных векторных полей

$$S_G = \sum_i \left(D_x^i(\Phi) \frac{\partial}{\partial \varphi_i} + D_x^i(\Psi) \frac{\partial}{\partial \psi_i} \right),$$

где $G = (\Phi, \Psi)$ — производящее сечение, D_x — полная производная по x и φ_k, ψ_k — координаты на бесконечном продолжении, [2]. Мы не делаем различия между симметриями и их производящими сечениями. Тогда G находится из уравнений

$$(5) \quad \begin{cases} D_t(\Phi) = \frac{\psi_x^\alpha}{A^\alpha} \frac{\partial F}{\partial \psi} \Psi + 2 \frac{\varphi_x}{\psi_x} D_x(\Phi) + \left(\frac{F \alpha \psi_x^{\alpha-1}}{A^\alpha} - \frac{\varphi_x^2}{\psi_x^2} \right) D_x(\Psi), \\ D_t(\Psi) = D_x(\Phi). \end{cases}$$

Ниже описываются решения 1-го порядка, т.е. зависящие от $t, x, \varphi, \psi, \varphi_x, \psi_x$. В таблице 1 приведены размерности пространств решений в зависимости от вида функций F и A . Алгебры симметрий обозначаются ниже через \mathfrak{g} .

Всюду выше a, b, c, k, l, s — вещественные константы, причём a, b, k, l не равны нулю. Последний столбец и строка таблицы соответствуют функциям общего вида. Ниже для краткости мы пользуемся обозначениями $B = A^{-\alpha}$ и $\Phi = \varphi_x^2/\psi_x$. Кроме того, при описании структуры алгебры Ли мы указываем только ненулевые коммутаторы.

Таблица 1. Размерности алгебр симметрий \mathfrak{g}

	$F = 0$	$F = k$	$F = ke^{l\psi}$	$F = (k\psi + s)^l$	F
$A = a$	—	6	5	5	4
$A = ae^{bx}$	—	4	4	—	3
$A = (ax + c)^b$	—	4	3	3	2
A	∞	3	3	—	2

$\mathbf{F} = \mathbf{0}$. В этом случае получаемое уравнение линеаризуемо с бесконечномерной алгеброй симметрий. Поскольку оно не зависит от параметров задачи (A и α), мы не рассматриваем его в деталях.

$\mathbf{F} = \mathbf{k}$, $\mathbf{V} = \mathbf{a}$. Алгебра \mathfrak{g} шестимерна и порождена элементами

$$G_1 = (1, 0), \quad G_2 = (\varphi_x, \psi_x), \quad G_3 = (\psi + t\varphi_x, t\psi_x), \quad G_4 = (0, 1),$$

$$G_5 = \left(\alpha(\varphi_x + akt\psi_x^\alpha + t\Phi) + x\varphi_x \right), \quad G_6 = \left(ak\psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x \right).$$

Нетривиальные коммутаторы имеют вид

$$[G_1, G_5] = \alpha G_1, \quad [G_2, G_5] = -G_2, \quad [G_3, G_4] = -G_1,$$

$$[G_3, G_5] = (\alpha - 1)G_3, \quad [G_3, G_6] = G_2, \quad [G_4, G_5] = G_4, \quad [G_5, G_6] = \alpha G_6.$$

$\mathbf{F} = \mathbf{k}$, $\mathbf{V} = \mathbf{ae}^{bx}$. Четырёхмерная алгебра \mathfrak{g} порождена образующими

$$G_1 = (1, 0), \quad G_2 = \left(\varphi_x - \frac{b}{2}(\varphi + akte^{bx}\psi_x^\alpha + 2t\Phi), \psi_x - \frac{1}{2}bt\varphi_x \right),$$

$$G_3 = (0, 1), \quad G_4 = \left(akte^{bx}\psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x \right)$$

с соотношениями

$$[G_1, G_2] = -\frac{b}{2}G_1, \quad [G_2, G_4] = -\frac{b}{2}G_4.$$

$\mathbf{F} = \mathbf{k}$, $\mathbf{V} = (\mathbf{ax} + \mathbf{c})^b$. Здесь также $\dim \mathfrak{g} = 4$, а образующими являются вектор-функции

$$G_1 = (1, 0), \quad G_2 = (0, 1),$$

$$G_3 = \left(\frac{2\alpha - b}{2}(kt(ax + c)^b\psi_x^\alpha + \varphi) + \frac{ax + c}{a}\varphi_x + \frac{2\alpha - b}{2}t\Phi, \right.$$

$$\left. \frac{ax + c}{a}\psi_x + \frac{2\alpha - b}{2}t\varphi_x \right), \quad G_4 = \left(k(ax + c)^b\psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x \right),$$

которые подчиняются соотношениям

$$[G_1, G_3] = \left(\alpha - \frac{b}{2} \right) G_1, \quad [G_2, G_3] = G_2, \quad [G_3, G_4] = \left(\alpha - \frac{b}{2} \right) G_4.$$

$\mathbf{F} = \mathbf{k}$, \mathbf{V} . Алгебра симметрий является трёхмерной коммутативной алгеброй с образующими

$$G_1 = (1, 0), \quad G_2 = (0, 1), \quad G_3 = \left(kB\psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x \right).$$

$\mathbf{F} = \mathbf{ke}^{l\psi}$, $\mathbf{B} = \mathbf{a}$. Алгебра \mathfrak{g} пятимерна и порождена элементами.

$$G_1 = (1, 0), \quad G_2 = (\varphi_x, \psi_x), \quad G_3 = (\psi + t\varphi_x, t\psi_x),$$

$$G_4 = \left(\frac{l}{2}(\varphi + akte^{l\psi}\psi_x^\alpha + t\Phi), 1 + \frac{1}{2}lt\varphi_x \right), \quad G_5 = \left(akte^{l\psi}\psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x \right).$$

Нетривиальные соотношения суть

$$[G_1, G_4] = \frac{l}{2}G_1 \quad [G_3, G_4] = \frac{l}{2}G_3 - G_1, \quad [G_3, G_5] = G_2, \quad [G_4, G_5] = \frac{l}{2}G_5.$$

$\mathbf{F} = \mathbf{ke}^{l\psi}$, $\mathbf{B} = \mathbf{ae}^{bx}$. Алгебра четырёхмерна с образующими

$$G_1 = (1, 0), \quad G_2 = \left(\varphi_x - \frac{b}{2}(\varphi + akte^{bx+l\psi}\psi_x^\alpha) + bt\Phi, \psi_x - \frac{b}{2}t\varphi_x \right),$$

$$G_3 = \left(\frac{l}{2}(\varphi + akte^{bx+l\psi}\psi_x^\alpha) + t\Phi, 1 + \frac{l}{2}t\varphi_x \right),$$

$$G_4 = \left(kae^{bx+l\psi}\psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x \right)$$

и соотношениями

$$[G_1, G_2] = -\frac{b}{2}G_1, \quad [G_1, G_3] = \frac{l}{2}G_1, \quad [G_2, G_4] = -\frac{b}{2}G_4, \quad [G_3, G_4] = \frac{l}{2}G_4.$$

$\mathbf{F} = \mathbf{ke}^{l\psi}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{ax} + \mathbf{c})^b$. Алгебра симметрий трёхмерна и порождена элементами

$$G_1 = (1, 0), \quad G_2 = \left(\frac{l}{2}(\varphi + kt(ax + c)^b e^{l\psi}\psi_x^\alpha) + t\Phi, 1 + \frac{l}{2}t\varphi_x \right),$$

$$G_3 = \left(k(ax + c)^b e^{l\psi}\psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x \right),$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$[G_1, G_2] = \frac{l}{2}G_1, \quad [G_2, G_3] = \frac{l}{2}G_3.$$

$\mathbf{F} = \mathbf{ke}^{l\psi}$, \mathbf{B} . В этом случае алгебра \mathfrak{g} также трёхмерна с образующими

$$G_1 = (1, 0), \quad G_2 = \left(\frac{l}{2}(\varphi + ktBe^{l\psi}\psi_x^\alpha) + t\Phi, 1 + \frac{l}{2}t\varphi_x \right),$$

$$G_3 = \left(kBe^{l\psi}\psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x \right)$$

и соотношениями

$$[G_1, G_2] = \frac{l}{2}G_1, \quad [G_2, G_3] = \frac{l}{2}G_3.$$

$\mathbf{F} = (\mathbf{k}\psi + \mathbf{s})^l$, $\mathbf{B} = \mathbf{a}$. Пятимерная алгебра \mathfrak{g} порождена симметриями

$$G_1 = (1, 0), \quad G_2 = (\varphi_x, \psi_x), \quad G_3 = (\psi + t\varphi_x, t\psi_x),$$

$$G_4 = \left(\left(\alpha + \frac{l}{2} \right) (\varphi + at(k\psi + s)^l \psi_x^\alpha + t\varphi_x) + x\varphi_x + \alpha t\varphi_x^2 + lt\Phi, \psi + x\psi_x + \frac{s}{k} \right),$$

$$G_5 = \left(a(k\psi + s)^l \psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x \right),$$

которые подчиняются соотношениям

$$[G_1, G_4] = \left(\alpha + \frac{l}{2} \right) G_1, \quad [G_2, G_4] = -G_2, \quad [G_3, G_4] = \left(\alpha - 1 + \frac{l}{2} \right) G_3 - \frac{s}{k} G_1,$$

$$[G_3, G_5] = G_2, \quad [G_4, G_5] = \left(\alpha + \frac{l}{2} \right) G_5.$$

$\mathbf{F} = (\mathbf{k}\psi + \mathbf{s})^l$, $\mathbf{V} = (\mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{c})^b$. Алгебра симметрий трёхмерна с образующими

$$\begin{aligned} G_1 &= (1, 0), \\ G_2 &= \left(\frac{l+2\alpha-b}{2}(\varphi\psi_x + \psi_x^\alpha(k\psi + s)^l(ax+c)^bt + t\Phi) + \frac{ax+c}{a}\varphi_x, \right. \\ &\quad \left. \frac{l+2\alpha-b}{2}t\varphi_x + \frac{ax+c}{a}\psi_x + \psi + \frac{s}{k} \right), \\ G_3 &= \left(\psi_x^\alpha(k\psi + s)^l(ax+c)^b + \Phi, \varphi_x \right) \end{aligned}$$

и соотношениями

$$[G_1, G_2] = \left(\frac{\alpha b + l}{2} + \alpha \right) G_1, \quad [G_2, G_3] = \left(\frac{\alpha b + l}{2} + \alpha \right) G_3.$$

$\mathbf{F}, \mathbf{V} = \mathbf{a}$. Алгебра симметрий порождена элементами

$$G_1 = (1, 0), \quad G_2 = (\varphi_x, \psi_x), \quad G_3 = (\psi + t\varphi_x, t\psi_x), \quad G_4 = (aF\psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x)$$

с единственным нетривиальным соотношением $[G_3, G_4] = G_2$.

$\mathbf{F}, \mathbf{V} = \mathbf{a}e^{bx}$. Трёхмерная алгебра \mathfrak{g} имеет образующие

$$\begin{aligned} G_1 &= (1, 0), \quad G_2 = \left(\frac{b}{2}(\varphi + ate^{bx}F\psi_x^\alpha + t\Phi) - \varphi_x, \psi_x - \frac{b}{2}t\varphi_x \right), \\ G_3 &= \left(ae^{bx}F\psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x \right), \end{aligned}$$

которые подчинены соотношениям

$$[G_1, G_2] = -\frac{b}{2}G_1, \quad [G_2, G_3] = -\frac{b}{2}G_3.$$

$\mathbf{F}, \mathbf{V} = (\mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{c})^b$. Алгебра симметрий является двумерной коммутативной алгеброй с образующими

$$G_1 = (1, 0), \quad G_2 = ((ax+c)^b F\psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x).$$

\mathbf{F}, \mathbf{V} . Как и предыдущем пункте, алгебра двумерна и коммутативна. Образующие суть

$$G_1 = (1, 0), \quad G_2 = (BF\psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-29-10013).

Список литературы

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953.