

УДК 534.21, 517.957, 514.86

# НЕЛИНЕЙНЫЙ ЗВУКОВОЙ ПУЧОК В СРЕДЕ С ДИССИПАЦИЕЙ

**А.Г. Кушнер**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: [kushner@physics.msu.ru](mailto:kushner@physics.msu.ru)

**О.И. Чигур**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: [riman1703@gmail.com](mailto:riman1703@gmail.com)

**Ключевые слова:** нелинейная акустика, ограниченный акустический пучок, управление фокусировкой, уравнение Хохлова–Заболоцкой, уравнение Кузнецова.

**Аннотация:** В докладе найдена алгебра симметрий и построены серии точных решений уравнения Кузнецова, описывающего распространение акустического ограниченного пучка в среде с учетом рассеяния энергии. Некоторые из построенных решений имеют особенности, которые соответствуют явлению фокусировки пучка. Возможность управления фокусировкой ограниченного звукового пучка в среде без учета дисперсии, была открыта В.В. Лычагиным. Результаты, представленные в докладе, обосновывают возможность управления фокусировкой и при наличии дисперсии.

Распространение ограниченных звуковых пучков в нелинейных диссипативных средах описывается дифференциальным уравнением Кузнецова [4], которое имеет следующий вид:

$$(1) \quad \rho_{tx} = \alpha (\rho \rho_{\tau\tau} + \rho_{\tau}^2) + \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} \rho + \beta \rho_{\tau\tau\tau}.$$

Предполагается, что звуковой пучок распространяется в направлении оси  $x$ ,  $\Delta_{\perp}$  — оператор Лапласа по переменным  $y$  и  $z$ ,  $\tau = t - xc_0^{-1}$  — нормированное время,  $c_0$  — скорость звука в среде,  $\rho$  — отклонение плотности среды от равновесной,  $\alpha = (\gamma + 1)/(2c_0^2)$ ,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $\beta$  — числовой параметр, характеризующий диссипативность среды.

При  $\beta = 0$  уравнение (1) представляет собой уравнение Хохлова–Заболоцкой [7]. В работе [1] приводятся методы численного анализа и результаты вычислительных экспериментов для этого уравнения.

В 1979 году В.В. Лычагин [5] построил точные решения уравнения Хохлова–Заболоцкой, которым отвечает явление самофокусировки звукового пучка, открытое ранее экспериментально [6].

Оказалось, что если амплитуду звукового пучка менять по определенному закону вблизи генератора звука, то на некотором расстоянии от него произойдет фокусировка пучка. Это явление уже существенно отличается от явления самофокусировки и указывает метод управления звуковым пучком [10,11]. Решения уравнения Хохлова–Заболоцкой, моделирующие фокусировку, имеют слабый разрыв (разрыв производных) и их получение было основано на понятии многозначных решений дифференциальных уравнений [2].

Отметим, что трехмерность пучка, по-видимому, играет существенную роль, так как для одно- и двумерных моделей не удалось найти решений, отвечающих явлению фокусировки.

В данном докладе приводится алгебра симметрий уравнения Кузнецова и приведены его точные решения, которые показывают, что явление фокусировки имеет место и для этой модели.

Для упрощения вида уравнения (1) нормируем независимые переменные:

$$\tau \rightarrow \frac{\tau}{\alpha}, \quad x \rightarrow x, \quad y \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\alpha c_0}} y, \quad z \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\alpha c_0}} z.$$

Тогда уравнение Кузнецова примет вид

$$(2) \quad \rho_{\tau x} = \rho \rho_{\tau\tau} + \rho_{\tau}^2 + \rho_{yy} + \rho_{zz} + \lambda \rho_{\tau\tau\tau},$$

где  $\lambda = \beta \alpha^{-2}$ . Далее полагаем, что  $\lambda \neq 0$ .

**Теорема 1.** *Алгебра Ли точечных симметрий уравнения (2) бесконечномерна и порождена векторными полями*

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, & X_2 &= \partial_y, & X_3 &= \partial_z, \\ X_4 &= z\partial_y - y\partial_z, \\ X_5 &= 2t\partial_t + 4x\partial_x + 3y\partial_y + 3z\partial_z - 2\rho\partial_\rho, \\ X_f &= f'(x)y\partial_t + 2f(x)\partial_y - f''(x)y\partial_\rho, \\ X_g &= g'(x)z\partial_t + 2g(x)\partial_z - g''(x)z\partial_\rho, \\ X_h &= h(x)\partial_t - h'(x)\partial_\rho. \end{aligned}$$

Здесь  $f(x), g(x), h(x)$  — произвольные функции.

Теорема доказывается прямыми вычислениями.

Исходя из физического смысла, решения уравнения (2) должны убывать при удалении от оси  $x$ , то есть должно выполняться условие  $\lim \rho = 0$  когда  $y^2 + z^2 \rightarrow \infty$ . Это условие нужно учитывать при выборе симметрий при построении соответствующих инвариантных решений. А именно, физические симметрии должны сохранять решения, убывающие на бесконечности, т.е. когда  $y^2 + z^2 \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим векторное поле  $X_f$ . Преобразование сдвига вдоль траекторий этого векторного поля имеет вид:

$$(3) \quad \begin{cases} \tau = f'(x)(f(x)s^2 + ys) + \tau_0, \\ x = x_0, \\ y = 2f(x)s + y_0, \\ z = z_0, \\ \rho = f''(x)(f(x)s^2 + y_0s) + \rho_0. \end{cases}$$

Здесь  $s$  — параметр сдвига,  $\tau_0, x_0, y_0, z_0, \rho_0$  — начальные данные. Пусть  $\rho_0(\tau_0, x_0, y_0, z_0, \rho_0)$  — ограниченное на бесконечности решение. Преобразование (3) переводит его в решение

$$\rho = f(x)f''(x)s^2 + f''(x)y_0s + \rho_0 + \rho_0(\tau_0, x_0, y_0, z_0, \rho_0).$$

Таким образом, если  $f''(x) \neq 0$ , то  $u \rightarrow \infty$  при  $y_0 \rightarrow \infty$ . Поэтому условие  $f''(x) = 0$  должно выполняться. Легко заметить, что это условие является достаточным.

Аналогично можно показать, что необходимым и достаточным условием сохранения убывания на бесконечности решений является условие  $g''(x) = 0$ .

Рассмотрим теперь векторное поле  $X_h$ . Преобразование сдвига вдоль траекторий этого векторного поля имеет вид:

$$(4) \quad \begin{cases} \tau = h(x)s + \tau_0, \\ x = x_0, \\ y = y_0, \\ z = z_0, \\ \rho = -f'(x)s + \rho_0. \end{cases}$$

Пусть  $\rho_0(\tau_0, x_0, y_0, z_0, \rho_0)$  — ограниченное на бесконечности решение. Преобразование (4) переводит его в решение

$$\rho = -f'(x)s + \rho_0(\tau_0, x_0, y_0, z_0, \rho_0).$$

Таким образом, поток векторного поля  $X_h$  любое ограниченное решение переводит в решение, которое также ограничено на бесконечности.

В результате получим, что функции  $f(x)$  и  $g(x)$  являются линейными, а функция  $h$  — произвольная. Поэтому можно положить  $f(x) = g(x) = x$ .

Таким образом, физически осмысленная подалгебра алгебры Ли симметрий уравнения (2) является конечномерной подалгеброй  $\mathfrak{g}$ , порожденной векторными полями  $X_1, \dots, X_5$  и

$$X_6 = y\partial_\tau + 2x\partial_y, \quad X_7 = z\partial_\tau + 2x\partial_z, \quad X_h.$$

Если положить  $h(x) = 1$ , то получим векторное поле  $X_h = \partial_\tau$ . Тогда получим конечномерную алгебру Ли, структурная таблица которой представлена в Таблице 1. Здесь  $X_8 = \partial_\tau$ .

Подалгебра  $\mathfrak{g}$  может быть использована для построения точных решений уравнения (2). В качестве примера рассмотрим трехмерную подалгебру, порожденную векторными полями  $X_2, X_5, X_7$ . Базовые дифференциальные инварианты этой подалгебры имеют вид

$$\rho\sqrt{x}, \quad \frac{z^2 - 4tx}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Поэтому инвариантное решение уравнения (2) ищем в виде

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{x}}U\left(\frac{z^2 - 4tx}{x^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Таблица 1. Коммутационные соотношения в подалгебре Ли  $\mathfrak{g}$ 

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$
$X_1$	0	0	0	0	$\frac{4}{3}X_1$	$2X_2$	$2X_3$	0
$X_2$	0	0	0	$-X_3$	$X_2$	$X_8$	0	0
$X_3$	0	0	0	$X_2$	$X_3$	0	$X_8$	0
$X_4$	0	$X_3$	$-X_2$	0	0	$X_7$	$-X_6$	0
$X_5$	$-\frac{4}{3}X_1$	$-X_2$	$-X_3$	0	0	$\frac{1}{3}X_6$	$\frac{1}{3}X_7$	$-\frac{2}{3}X_8$
$X_6$	$-2X_2$	$-X_8$	0	$-X_7$	$-\frac{1}{3}X_6$	0	0	0
$X_7$	$-2X_3$	0	$-X_8$	$X_6$	$-\frac{1}{3}X_7$	0	0	0
$X_8$	0	0	0	0	$\frac{2}{3}X_8$	0	0	0

Редуцированное уравнение имеет вид

$$32aU'' + 8UU' + sU = 0,$$

где  $U = U(s)$ ,  $s = (z^2 - 4tx)x^{-\frac{3}{2}}$ . Общее решение редуцированного уравнения довольно громоздко и записывается в терминах функции Ламберта. Однако оно имеет частное решение  $U(s) = -s/8$ . Соответствующее решение уравнения (2) имеет вид

$$\rho = \frac{4tx - z^2}{8x^2}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-29-10013).

## Список литературы

1. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982.
2. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1986. 336 с.
3. Заболотская Е.А., Хохлов Р.В. Квазишпоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков // Акуст. журн. 1969. Т. 15, № 1. С. 40-47.
4. Кузнецов В.П. Уравнения нелинейной акустики // Акуст. журнал. 1970. Т. 16, №о 4. С. 548-553.
5. Лычагин В.В. Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, № 1 (205). С. 137-165.
6. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
7. Руденко О.В. К 40-летию уравнения Хохлова-Заболоцкой // Акуст. журнал. 2010. Т. 56, № 4. С. 452-462 .
8. Чигур О.И. Точные сингулярные решения уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова // Уч. зап. физич. факультета МГУ. 2018. № 4. С. 1840602.
9. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Ред. А.М. Виноградов, И.С. Красильщик. М.: Факториал Пресс, 2005. 380 с.
10. Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N. Contact geometry and nonlinear differential equations // Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 101. Cambridge: Cambridge University Press. 2007. xxii+496 p.
11. Lychagin V.V. Singularities of multivalued solutions of nonlinear differential equations and nonlinear Phenomena // Acta Appl. Math. 1985. No. 3. P. 135-173.