

УДК 514.86

СТАЦИОНАРНАЯ АДИАБАТИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

В.В. Лычагин

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: valentin.lychagin@uit.no

М.Д. Рооп

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: roop.md14@physics.msu.ru

Ключевые слова: фильтрация реальных газов, термодинамика, фазовые переходы, газ Ван-дер-Ваальса.

Аннотация: Рассматривается стационарная фильтрация реальных газов в трехмерном пространстве, которая описывается системой дифференциальных уравнений, состоящей из закона сохранения массы и закона Дарси. Приводится геометрическое описание термодинамических состояний реальных газов как лагранжевых многообразий. Описаны области, соответствующие различным фазам, приводится кривая фазового перехода. Для адиабатической фильтрации получены точные решения системы и описаны фазовые переходы газов Ван-дер-Ваальса в пространстве в случае одного точечного источника.

1. Уравнения стационарной фильтрации

Стационарная фильтрация газов в трехмерной пористой среде описывается системой дифференциальных уравнений [1]:

$$(1) \quad \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$(2) \quad \mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla p,$$

$$(3) \quad (\mathbf{u}, \nabla \sigma) = 0,$$

где $\rho(x)$ — плотность газа, $\mathbf{u}(x)$ — скорость фильтрации, $p(x)$ — давление, $\sigma(x)$ — удельная энтропия, k и μ — коэффициенты проницаемости и динамической вязкости соответственно, которые предполагаются постоянными, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Уравнение (1) соответствует закону сохранения массы, уравнение (2) — закон Дарси, уравнение (3) означает постоянство удельной энтропии вдоль потока. При условии, что все неизвестные функции зависят от расстояния до источника, уравнение (3) приводит к тому, что энтропия постоянна в некоторой окрестности источника. Однако мы

будем предполагать, что энтропия постоянна всюду в рассматриваемой области, то есть $\sigma(x_1, x_2, x_3) = \sigma_0$.

Видно, что система (1)-(2) неполна. Для того чтобы она стала замкнутой, необходимы уравнения, описывающие термодинамическое состояние рассматриваемого газа.

2. Термодинамическое состояние

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^5(p, T, v, e, \sigma)$, где $v = \rho^{-1}$, T — температура, e — внутренняя энергия, снабженное контактной 1-формой [2]:

$$\theta = T^{-1}de - d\sigma + (pT^{-1})dv.$$

Под термодинамическим состоянием мы будем понимать двумерное лежандрово многообразие $L \subset \mathbb{R}^5(p, T, v, e, \sigma)$, на котором форма θ обращается в ноль:

$$\theta|_L = 0.$$

Последнее условие означает, что на многообразии L выполняется первое начало термодинамики. Если энтропия задана как функция $\sigma(e, v)$, то условие $\theta|_L = 0$ приводит к соотношениям, задающим лежандрово многообразие L :

$$\sigma = \sigma(e, v), \quad T = \frac{1}{\sigma_e}, \quad p = \frac{\sigma_v}{\sigma_e}.$$

Поскольку обычно уравнения состояния не содержат энтропию, то необходимо исключить ее из нашего рассмотрения. Для этого рассмотрим проекцию $\phi: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\phi: (p, T, v, e, \sigma) \mapsto (p, T, v, e)$ и рассмотрим симплектическое пространство \mathbb{R}^4 со структурной 2-формой

$$\Omega = d\theta = T^{-2}de \wedge dT + T^{-1}dp \wedge dv + pT^{-2}dv \wedge dT.$$

Тогда $\bar{L} = \phi(L)$ — лагранжево многообразие в симплектическом пространстве (\mathbb{R}^4, Ω) с координатами (p, T, v, e) , то есть $\Omega|_{\bar{L}} = 0$.

Любая лагранжева поверхность $\bar{L} \subset \mathbb{R}^4$ задается двумя уравнениями:

$$(4) \quad f(p, T, v, e) = 0, \quad g(p, T, v, e) = 0,$$

и условие $\Omega|_{\bar{L}} = 0$ может быть записано в виде:

$$(5) \quad [f, g] = 0 \text{ на } \bar{L},$$

где $[f, g]$ — скобка Пуассона функций f и g :

$$[f, g]\Omega \wedge \Omega = df \wedge dg \wedge \Omega.$$

Условие (5) означает совместность следующей системы дифференциальных уравнений:

$$(6) \quad f\left(\frac{\sigma_v}{\sigma_e}, \frac{1}{\sigma_e}, v, e\right) = 0, \quad g\left(\frac{\sigma_v}{\sigma_e}, \frac{1}{\sigma_e}, v, e\right) = 0,$$

которая определяет функцию $\sigma(e, v)$ с точностью до константы.

Таким образом, термодинамическое состояние задается двумя соотношениями (4) с дополнительным условием (5).

3. Газ Ван-дер-Ваальса

3.1. Уравнения состояния

Наиболее распространенной моделью, описывающей реальные газы, является модель Ван-дер-Ваальса [3]. Первое уравнение состояния таких газов имеет вид:

$$(7) \quad f(p, T, e, v) = \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) - RT = 0,$$

где a и b — константы, характеризующие взаимодействие частиц газа и объем молекул газа соответственно, R — универсальная газовая постоянная. Для нахождения второго уравнения состояния мы предполагаем, что $g(p, T, e, v) = e - \beta(v, T)$ и вычисляем скобку Пуассона $[f, g]|_L$. Если учесть, что случай $a = 0$ и $b = 0$ соответствует идеальному газу, то имеем:

$$(8) \quad g(p, T, e, v) = e - \frac{n}{2}RT + \frac{a}{v} = 0,$$

где n — число степеней свободы.

Решение системы (6) для газа Ван-дер-Ваальса имеет вид:

$$(9) \quad \sigma(e, v) = \frac{nR}{2} \ln \left(e + \frac{a}{v}\right) + R \ln(v - b) + s_0.$$

Таким образом, лежандрово многообразие L газов Ван-дер-Ваальса задается соотношениями (7)-(9).

3.2. Фазовые переходы

Фазовые переходы в модели Ван-дер-Ваальса могут быть описаны с помощью рис. 1. Серая область между точками v_1 и v_2 соответствует фазовому переходу газ-

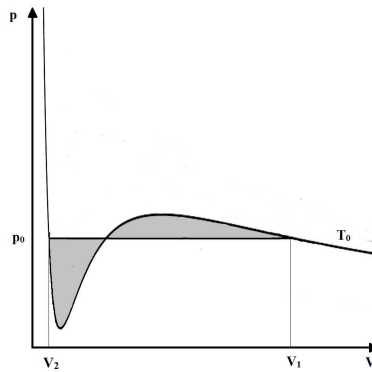


Рис. 1. Изотерма газа Ван-дер-Ваальса

жидкость. Для того чтобы найти их, мы используем условие термодинамического равновесия двух фаз: $\gamma(v_1, p_0, T_0) = \gamma(v_2, p_0, T_0) = \gamma_0$, где p_0, T_0 — давление и температура фазового перехода соответственно, а γ — химический потенциал:

$$\gamma = e - T\sigma + pv,$$

а также условие принадлежности точек $(v_{1,2}, p_0, T_0)$ поверхности L . С помощью соотношений (7)-(9) химический потенциал можно записать как функцию переменных (T, v) . В результате будем иметь четыре уравнения с пятью неизвестными $\gamma_0, v_{1,2}, p_0, T_0$:

$$(10) \quad \mu_0 = \frac{nRT_0}{2} - \frac{a}{v_{1,2}} - T_0 \left(\frac{nR}{2} \ln \left(\frac{nR}{2} T_0 \right) + R \ln(v_{1,2} - b) \right) + p_0 v_{1,2},$$

$$(11) \quad p_0 - p_0 v_{1,2}^{-1} b + a v_{1,2}^{-2} - a b v_{1,2}^{-3} - v_{1,2}^{-1} R T_0 = 0.$$

Исключая все термодинамические переменные, кроме $v_{1,2}$, получаем кривую — множество решений (v_1, v_2) : Зная пару (v_1, v_2) с помощью (10)-(11) можно вычислить

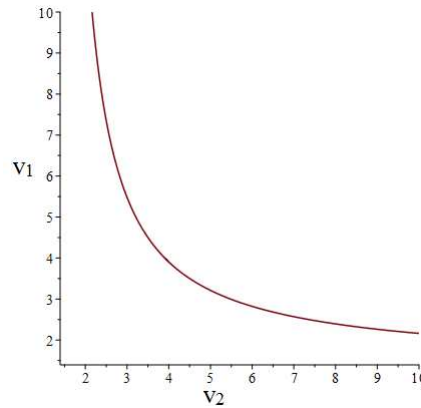


Рис. 2. Точки фазового перехода

соответствующие температуру T_0 и давление p_0 фазового перехода.

Таким образом, для каждой температуры T_0 фазового перехода известны значения удельных объемов $v_{1,2} = \rho_{1,2}^{-1}$, между которыми происходит скачок.

4. Решение задачи стационарной фильтрации

Рассмотрим контактное преобразование $(p, T, v, e, \sigma) \mapsto (p/p_c, T/T_c, v/v_c, e/e_c, \sigma/\sigma_c)$, где

$$p_c = \frac{a}{27b^2}, \quad T = \frac{8a}{27bR}, \quad v_c = 3b, \quad e_c = \frac{a}{9b}, \quad \sigma_c = \frac{3R}{8}.$$

Тогда систему (7)-(9) при постоянной энтропии можно записать в безразмерных переменных:

$$(12) \quad 3\rho - (p + 8T)\rho + 9\rho^2 - 3\rho^3 = 0,$$

$$(13) \quad e - \frac{4n}{3}T + 3\rho = 0,$$

$$(14) \quad \sigma_0 - \frac{4n}{3} \ln(e + 3\rho) - \frac{8}{3} \ln \left(\frac{3}{\rho} - 1 \right) = 0,$$

Решение задачи стационарной адиабатической фильтрации может быть выражено следующими двумя теоремами.

Теорема 1. Пусть в точке x_0 расположен точечный источник с заданной интенсивностью J . Тогда решение задачи (1)-(2), (12)-(14) имеет вид:

$$\rho = Q^{-1} \left(\frac{J}{4\pi|x-x_0|} \right), \quad T = 8c(3\rho^{-1} - 1)^{1-\alpha}, \quad p = 3\rho^2 - c(3\rho^{-1} - 1)^{-\alpha},$$

где

$$c = \frac{6}{n} \exp \left(\frac{3\sigma_0}{4} \right), \quad \alpha = 1 + \frac{2}{n},$$

$$Q(\rho) = 2\rho^3 - c(3 - \rho)^{-\alpha}\rho^{1-\alpha} + c \int (3\rho^{-1} - 1)^{-\alpha} d\rho.$$

Теорема 2. Функция $Q(\rho)$ обратима, если

$$c > \frac{2n}{n+2} \left(1 - \frac{2}{n} \right)^{1-2/n} \left(2 + \frac{2}{n} \right)^{2+2/n}.$$

Знание распределений плотности и температуры в каждой точке пространства позволяет определить, где происходит фазовый переход. Зафиксируем некоторую точку x^* . Пусть температура в этой точке равна T^* , а плотность ρ^* . Для заданной температуры T^* известны значения плотностей ρ_1^* и ρ_2^* , между которыми происходит фазовый переход. Сравнивая с ними ρ^* , можно заключить, в каком состоянии находится среда в данной точке. Результат для $c = 12$, $n = 3$ представлен на графике ниже. Значение $y = 0$ соответствует фазе газ, значение $y = 0.5$ — процессу

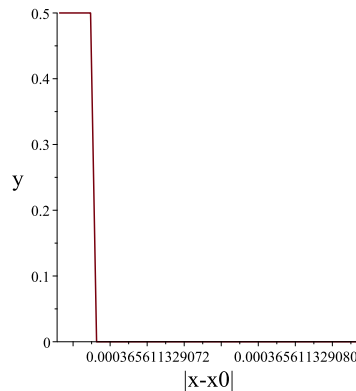


Рис. 3. Распределение фаз в пространстве

конденсации газа в жидкость.

Таким образом, в области около источника наблюдается конденсация газа.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-29-10013).

Список литературы

1. Akhmetzianov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V. Two-dimensional nonisothermal filtration and optimal control of oil development // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, No. 11. P. 888-890.
2. Duyunova A.A., Lychagin V.V., Tychkov S.N. Classification of Equations of State for Viscous Fluids // Doklady Mathematics. 2017. Vol. 95, No. 2. P. 172-175.
3. Batchelor G.K. An introduction to fluid dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. 615 p.