УДК 517.977

НИЛЬПОТЕНТНАЯ СУБРИМАНОВА ЗАДАЧА С ВЕКТОРОМ РОСТА (2,3,5,8)

Е.Ф. Сачкова

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН

Россия, 152021, Ярославская область, Переславский район, с. Веськово, ул. Петра Первого, д. 4 «а»

E-mail: efsachkova@mail.ru

Ключевые слова: оптимальное управление, геометрическая теория управления, субриманова геометрия.

Аннотация: Рассматривается нильпотентная субриманова задача с вектором роста (2,3,5,8). Исследуются анормальные траектории. Описана структура множества анормальных траекторий. Исследована строгая анормальность и оптимальность этих траекторий.

1. Введение

1.1. Постановка задачи оптимального управления

Нильпотентная субриманова задача с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$ ставится как задача оптимального управления

$$\dot{x} = u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_8) \in \mathbb{R}^8,\ u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \quad x(T) = x^1, \tag{2}$$

$$l = \int_0^T \sqrt{(u_1^2 + u_2^2)}dt \to \min \Leftrightarrow J = \frac{1}{2}\int_0^T (u_1^2 + u_2^2)dt \to \min, \tag{3}$$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{x_1 x_2^2}{4}\frac{\partial}{\partial x_7} - \frac{x_2^3}{6}\frac{\partial}{\partial x_8}, \tag{4}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{x_1^3}{6}\frac{\partial}{\partial x_6} + \frac{x_1^2 x_2}{4}\frac{\partial}{\partial x_7}, \tag{5}$$

$$u(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^2),\ x(\cdot) \in \mathrm{Lip}([0, T], \mathbb{R}^8). \tag{6}$$

Цель данной работы — исследование анормальных экстремальных траекторий в задаче (1)–(6). Это важно по следующим причинам:

- Задача (1)–(6) есть простейшая субриманова задача глубины 4,
- Нормальный геодезический поток этой задачи неинтегрируем по Лиувиллю [1].

1.2. Принцип максимума Понтрягина

Рассматривается кокасательное расслоение пространства состояний

$$T^*\mathbb{R}^8 = \{(x,\psi)|\, x \in \mathbb{R}^8,\, \psi \in T_x^*\mathbb{R}^8\},$$

его элементы $\lambda = (x,\, \psi) \in T^*\mathbb{R}^8$. Функция Понтрягина имеет вид

$$h_u^\nu(\lambda) = \langle \psi,\, u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x)\rangle + \frac{\nu}{2}\left(u_1^2 + u_2^2\right), \qquad \lambda \in T^*\mathbb{R}^8, \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Принцип максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи формулируется следующим образом (см. [2, 3]).

Теорема 1. *Если управление $u(t)$ и соответствующая траектория $x(t)$ оптимальны, то существуют липшицева кривая $\lambda(t) = (x(t),\, \psi(t)) \in T^*\mathbb{R}^8$ и число $\nu \in \{-1,\, 0\}$, для которых следующие условия выполняются для п.в. $t \in [0,T]$:*

$$\dot\lambda(t) = \vec{h}^{\nu}_{u(t)}(\lambda(t)), \tag{7}$$

$$h^{\nu}_{u(t)}(\lambda(t)) = \max_{v\in\mathbb{R}^2} h^{\nu}_{v}(\lambda(t)), \tag{8}$$

$$(\nu,\, \lambda(t)) \neq (0,0). \tag{9}$$

С помощью скобок Ли строится базис в нильпотентной алгебре Ли, порожденный полями (4), (5): $X_1, \ldots, X_8$. Вводятся сопряженные переменные $h_i(\lambda) = \langle \psi,\, X_i(x)\rangle$, $i = 1,\, \ldots,\, 8$, $\lambda = (x,\, \psi) \in T^*\mathbb{R}^8$. Исследуется гамильтонова система принципа максимума Понтрягина (7) для задачи (1)–(6):

$$\begin{aligned}
&\dot h_1 = -h_3 u_2,\\
&\dot h_2 = h_3 u_1,\\
&\dot h_3 = h_4 u_1 + h_5 u_2,\\
&\dot h_4 = h_6 u_1 + h_7 u_2,\\
&\dot h_5 = h_7 u_1 + h_8 u_2,\\
&\dot h_6 = \dot h_7 = \dot h_8 = 0,\\
&\dot x = u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x).
\end{aligned} \tag{10}$$

Рассматриваются ненулевые управления $u_1^2(t) + u_2^2(t) \not\equiv 0$.

2. Невырожденные анормальные траектории

2.1. Анормальная гамильтонова система ПМП

Рассматривается анормальный случай $\nu = 0$.

Вырожденный случай для анормальной гамильтоновой системы (10) заключается в том, что

$$\psi \in (\mathrm{span}(X_1, \ldots, X_5))^\perp,\ \ X_3 = [X_1, X_2], X_4 = [X_1, X_3], X_5 = [X_2, X_3].$$

Этот случай был исследован в работе [4].

В докладе рассматривается невырожденный случай анормальной гамильтоновой системы ПМП для левоинвариантной задачи (1)– (6). Задача Коши для гамильтоновой системы (10) при условии максимума (8) в невырожденном анормальном случае и при начальном условии $\lambda(0) = (x(0), \psi(0)) = \lambda^0 = (0,\, \psi^0)$ принимает вид:

$$
\begin{aligned}
& h_1 = h_2 = h_3 = 0, \\
& h_4^2 + h_5^2 \not\equiv 0, \\
& u_1(t) = -\alpha(t) h_5(t), \\
& u_2(t) = \alpha(t) h_4(t), \\
& \begin{pmatrix} \dot h_4 \\ \dot h_5 \end{pmatrix} = \alpha(t) \begin{pmatrix} h_7 & -h_6 \\ h_8 & -h_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_4 \\ h_5 \end{pmatrix}, \\
& \dot h_6 = \dot h_7 = \dot h_8 = 0, \\
& \dot x = -\alpha(t) h_5(t) X_1(x_1(t),\, x_2(t)) + \alpha(t) h_4(t) X_2(x_1(t),\, x_2(t)), \\
& \lambda(0) = (0,\, \psi^0),
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где $\alpha(t) \in L^\infty([0,\, T], \mathbb{R})$, $\alpha(t) \neq 0$ для п.в. $t \in [0, T]$, произвольна.

Невырожденный анормальный сопряженный вектор удовлетворяет условию

$$\psi \in (\mathrm{span}(X_1, X_2, X_3))^\perp.$$

2.2. Невырожденные анормальные экстремальные пары

Невырожденные сопряженные векторы имеют вид

$$\psi(0) = \psi^0 = (0, 0, 0, h_4^0, h_5^0, h_6, h_7, h_8), \qquad (h_4^0)^2 + (h_5^0)^2 \neq 0.$$

Экстремальные пары суть $\lambda(t) = (x(t),\, \psi(t))$.

На первом этапе исследования задачи Коши (11) рассматривается система при $\alpha(t) \equiv 1$. Тогда для любого $\lambda^0 = (0, \psi^0) \in T^*\mathbb{R}^8$ существует каноническая невырожденная анормальная экстремальная пара:

$$(u^c(t, \psi^0),\, \lambda^c(t, \lambda^0)), \quad \begin{pmatrix} u_2^c(t, \psi^0) \\ -u_1^c(t, \psi^0) \end{pmatrix} = e^{Ct} \begin{pmatrix} h_4^0 \\ h_5^0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} h_7 & -h_6 \\ h_8 & -h_7 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T].$$

На втором этапе исследования задачи Коши (11) рассматривается система с произвольной функцией $\alpha(t) \in L^\infty([0,\, T], \mathbb{R})$, $\alpha(t) \neq 0$ для п.в. $t \in [0, T]$. Тогда для любого $\lambda^0 = (0, \psi^0) \in T^*\mathbb{R}^8$ существует невырожденная анормальная экстремальная пара:

$$(\tilde u(t), \tilde\lambda(t)) = (\alpha(t) u^c(s(t),\, \psi^0), \lambda^c(s(t), \lambda^0)),$$

где $s(t) \in \mathrm{Lip}([0,\, T],\, [0,\, S])$, $s'(t) = \alpha(t)$ для п.в. $t \in [0, T]$.

Управления $u(t, \psi^0)$ и соответствующие траектории $x(t, \psi^0)$ были названы: $\Delta > 0$ эллиптическими; $\Delta < 0$ гиперболическими; $\Delta = 0$ параболическими.

3. Структура анормальных траекторий

Доказано, что множество анормальных траекторий находится в естественном взаимно однозначном соответствии со множеством кривых первого и второго порядка на плоскости.

Предложение 1. *Анормальные траектории проецируются на плоскость x_1x_2 в кривые первого и второго порядка: в прямые, эллипсы, гиперболы или параболы.*

Обратно, для любой такой кривой на плоскости x_1x_2, выходящей из начала координат, найдется единственная анормальная траектория, проецирующаяся в эту кривую.

4. Строгая и нестрогая анормальность экстремальных траекторий

Невырожденные анормальные экстремальные траектории исследуются на строгую анормальность и оптимальность.

Анормальная экстремальная траектория $x(t)$ называется *нестрого анормальной*, если она является проекцией некоторой нормальной экстремали $(\psi(t),\, x(t))$; в противном случае она называется *строго анормальной.*

Доказан критерий строгой анормальности.

Теорема 2. *Пусть $x^c(t)$, $t \in [0,T]$, — невырожденная каноническая анормальная экстремальная траектория. Ее натуральная перепараметризация $\tilde{x}(s) = x^c(t(s))$ строго анормальна тогда и только тогда, когда не существует постоянного действительного вектора $\bar{c} \in \mathbb{R}^6$ такого, что на всем отрезке $[0,T]$ выполнялось бы тождество:*

$$k(t) + P(t;\bar{c}) \equiv 0, \tag{12}$$

$$k(t) = \frac{\ddot{x}_1^c\dot{x}_2^c - \dot{x}_1^c\ddot{x}_2^c}{((\dot{x}_1^c)^2 + (\dot{x}_2^c)^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{13}$$

$$P(t;\bar{c}) = c_0 + c_1x_1^c(t) + c_2x_2^c(t) + c_3(x_1^c(t))^2 + c_4x_1^c(t)x_2^c(t) + c_5(x_2^c(t))^2. \tag{14}$$

Предложение 2. *Пусть $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ есть произвольный эллипс (не окружность), гипербола или парабола. Тогда кривизна $k(t) \not\equiv P(x_1(t), x_2(t))$. где $P(x_1, x_2)$ — полином.*

Теорема 3. *Равномерно пробегаемые невырожденные анормальные экстремальные траектории в $(2,3,5,8)$-задаче*

1. *эллиптического (не кругового), гиперболического (не линейного) и параболического (не линейного) типов — строго анормальны;*

2. *кругового, гиперболического линейного и параболического линейного типов — нестрого анормальны.*

Все неравномерно пробегаемые невырожденные анормальные экстремальные траектории в $(2,3,5,8)$-задаче — строго анормальны.

5. Оптимальность

Монотонно пробегаемая анормальная траектория есть перепараметризованная неубывающей липшицевой функцией равномерно пробегаемая анормальная траектория, см. [4].

Теорема 4. *Монотонно пробегаемая круговая анормальная экстремальная траектория $x(t) \in \mathbb{R}^8$ глобально оптимальна вплоть до первого витка спирали, являющейся ее проекцией на трехмерное подпространство $\mathbb{R}_{x_1x_2x_3}$.*

Теорема 5. *Круговые оптимальные траектории $x(t) \in \mathbb{R}^8$, $x(0) = 0$, заполняют невырожденное гладкое трехмерное многообразие $G^{\pm} \subset \mathbb{R}^8$, каждая из двух симметричных компонент которого является графиком некоторой гладкой вектор-функции:*

$$\vec{F}^{\pm}(x_1,\, x_2,\, x_3) = (x_4(x_1,\, x_2,\, \pm|x_3|), \ldots, x_8(x_1,\, x_2,\, \pm|x_3|)),$$
$$x_1^2 + x_2^2 \neq 0,\; x_3 \neq 0.$$

Теорема 6. *Монотонно пробегаемые гиперболические линейные и параболические линейные анормальные экстремальные траектории являются оптимальными до бесконечности.*

Известно, см. [4], что такие траектории заполняют вырожденную анормальную поверхность, являющуюся двумерным гладким многообразием $G_0 \in \mathbb{R}^8$. Доказано, что замыкание трехмерного невырожденного гладкого многообразия $G^{\pm} \subset \mathbb{R}^8$ содержит двумерную вырожденную анормальную поверхность $G_0 \subset \mathbb{R}^8$.

Доказано, что коранг траекторий, проецирующихся на радиальные лучи в плоскости x_1x_2, не меньше пяти.

Теорема 7. *1. Монотонно пробегаемые вырожденные анормальные траектории ($\psi \in (\mathrm{span}(X_1, \ldots, X_5))^{\perp}$) оптимальны, см. [4].*

2. Короткие дуги монотонно пробегаемых невырожденных анормальных траекторий ($\psi \in (\mathrm{span}(X_1, X_2, X_3))^{\perp}$) оптимальны.

Следствие 1. *Монотонно пробегаемые анормальные траектории являются субримановыми геодезическими.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

Список литературы

1. Локуциевский Л.В., Сачков Ю.Л. Об интегрируемости по Лиувиллю субримановых задач на группах Карно глубины 4 и больше // Матем. сб. 2018. Т. 209, № 5ю С 74–119.
2. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
4. Сачков Ю.Л., Сачкова Е.Ф. Вырожденные анормальные траектории в субримановой задаче с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$ // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 3. С. 362-374.