

# ЯЗЫК БЕСКОНЕЧНЫХ ДЖЕТОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

В.Н. Четвериков

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э.Баумана

Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

E-mail: [chetverikov.vl@yandex.ru](mailto:chetverikov.vl@yandex.ru)

**Ключевые слова:** системы вход-выход, динамическая обратная связь, декомпозиция систем с управлением, бесконечные джеты, преобразования Бэклунда.

**Аннотация:** В докладе на языке бесконечных джетов формулируются некоторые понятия теории управления. В частности, доказывається, что отображение вход-выход есть преобразование Бэклунда. Динамическая обратная связь системы — накрытие над данной системой. Плоская система — система, диффеоморфная пространству бесконечных джетов. Динамически линейризуемая система — система, накрываемая пространством бесконечных джетов. Декомпозиция системы с управлением — накрытие из данной системы. Полученные формулировки предлагается использовать в дальнейшем при решении задач управления, связанных с этими понятиями.

## 1. Некоторые понятия теории управления

Рассмотрим гладкую регулярную систему с входом ( $u$ ) и выходом ( $y$ ):

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m,$$

$$(2) \quad y = h(t, x), \quad y \in \mathbb{R}^p.$$

Предположим зафиксированы начальные условия для переменных состояния  $x$ . Для каждой гладкой векторной функции  $u(t)$  переменной времени  $t$  при подстановке ее в систему (1) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных состояния. Пусть  $x(t)$  — решение задачи Коши для этой системы с заданными начальными условиями на  $x$ . Вычисляя  $y(t) = h(t, x(t))$ , получаем отображение  $u(t) \mapsto y(t)$ , которое называют *отображением вход – выход*.

*Динамической обратной связью* системы (1) называют систему вида

$$(3) \quad \dot{\xi} = a(t, x, \xi, v), \quad u = b(t, x, \xi, v), \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad v \in \mathbb{R}^m,$$

с состоянием  $\xi$ , входом  $(x, v)$  и выходом  $u$ . Область пространства с координатами  $t, x, \xi, v$ , где определены функции  $a$  и  $b$ , называют *областью определения*, а число  $d$  — *размерностью динамической обратной связи* (3).

Динамическую обратную связь (3) можно понимать как преобразование системы (1) в систему

$$(4) \quad \dot{x} = f(t, x, b(t, x, \xi, v)), \quad \dot{\xi} = a(t, x, \xi, v)$$

с состоянием  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{n+d}$  и управлением  $v$ . Второе равенство в (3) определяет отображение из множества решений системы (4) в множество решений системы (1).

Динамическую обратную связь (3) называют *регулярной*, если любое гладкое решение системы (1) может быть расширено до решения системы (4).

Говорят, что система (1) *динамически линеаризуема*, если существует такая регулярная динамическая обратная связь (3), что система (4) эквивалентна линейной управляемой системе.

Система (1) называется *плоской* в области  $\mathcal{O}^{(l)}$  с координатами  $t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(l)}$ , если на  $\mathcal{O}^{(l)}$  определены такие функции

$$(5) \quad y_1 = h_1(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(l)}), \quad \dots, \quad y_r = h_r(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(l)}),$$

что переменные  $x$  и  $u$  выражаются через  $t$ , функции (5) и их производные в силу системы (1) до какого-то конечного порядка, а любой конечный набор функций (5), их производных в силу системы (1) и функции  $t$  функционально независим. При этом набор функций (5) называется *плоским* (или *линеаризующим*) *выходом* системы (1).

*Декомпозицией* системы с управлением называют преобразование системы в систему вида

$$(6) \quad \dot{z} = g_1(t, z, v), \quad z \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad v \in \mathbb{R}^{m_1},$$

$$(7) \quad \dot{\zeta} = g_2(t, \zeta, z, v, \dot{v}, \dots, v^{(l)}, \xi), \quad \zeta \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{m_2},$$

с состоянием  $(z, \zeta)$  и управлением  $(v, \xi)$ .

Декомпозиция позволяет решать систему в два этапа: сначала находить решение  $(z(t), v(t))$  системы (6), а затем решение  $(\zeta(t), \xi(t))$  системы

$$\dot{\zeta} = g_2(t, \zeta, z(t), v(t), \dot{v}(t), \dots, v^{(l)}(t), \xi).$$

Рассматриваемую нами декомпозицию мы называем *орбитальной*, потому что для преобразования системы в декомпозируемую форму мы используем орбитальную эквивалентность [1].

## 2. Язык бесконечных джетов

Более полное изложение геометрии систем дифференциальных уравнений можно найти в [2].

С системой (1) связывают бесконечномерное пространство  $\mathbb{R}^\infty$  с топологией Тихонова и с координатами

$$(8) \quad t, x_1, \dots, x_n, u_1^{(0)}, \dots, u_m^{(0)}, u_1^{(1)}, \dots, u_m^{(1)}, u_1^{(2)}, \dots,$$

где координаты  $u_j^{(0)}$  соответствуют переменным  $u_j$ , а координаты  $u_j^{(l)}$  — производным  $d^l u_j / dt^l$ ,  $l > 0$ . Обозначим через  $\mathcal{E}^\infty$  открытое подмножество пространства  $\mathbb{R}^\infty$  с координатами (8), в котором определена система (1) и лежат допустимые управления.

Каждое гладкое решение  $s(t) = (x_*(t), u_*(t))$  системы (1) и точка  $t_0$ , в окрестности которой это решение определено, задают точку из  $\mathcal{E}^\infty$  с координатами

$$t = t_0, \quad x_i = x_{*,i}(t_0), \quad u_j^{(l)} = \frac{d^l u_{*,j}(t_0)}{dt^l}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad l \geq 0.$$

Эта точка называется *бесконечным джетом* решения  $s$  в точке  $t_0$ , а множество бесконечных джетов решения  $s$  во всех точках  $t_0$ , в окрестности которых это решение

определено, — графиком в  $\mathcal{E}^\infty$  решения  $s$ . Любая точка множества  $\mathcal{E}^\infty$  является бесконечным джетом некоторого решения (доказательство см. в [2]).

На множестве  $\mathcal{E}^\infty$  вводятся обычные дифференциально–геометрические понятия: гладкие функции, векторные поля, дифференциальные формы и т. д. А именно, *гладкой функцией на  $\mathcal{E}^\infty$*  называется бесконечно дифференцируемая функция, зависящая от конечного (но произвольного) набора переменных (8). Алгебра гладких функций на  $\mathcal{E}^\infty$  обозначается через  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ .

По определению, любая *дифференциальная  $k$ -форма на  $\mathcal{E}^\infty$*  зависит от конечного набора переменных (8). Любое дифференцирование алгебры  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$  представляет собой линейную комбинацию (в общем случае бесконечную) частных производных по координатам (8) и называется *векторным полем на  $\mathcal{E}^\infty$* . Векторное поле

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^n f_l(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\infty} u_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(j)}},$$

определенное в точках  $\mathcal{E}^\infty$ , называют *полной производной по  $t$  на  $\mathcal{E}^\infty$* .

Производная Ли вдоль  $D$  функции  $g \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$  совпадает с производной функции  $g$  в силу системы (1). Векторное поле  $D$  порождает распределение  $\mathcal{C}$  на  $\mathcal{E}^\infty$ , которое называют *распределением Картана на  $\mathcal{E}^\infty$* . Интегральные кривые распределения Картана совпадают с графиками решений системы (1). Поэтому в качестве *геометрической модели системы (1)* рассматривают пару  $(\mathcal{E}^\infty, \mathcal{C})$ , которую называют *диффеотопом* (или *бесконечным продолжением*) системы (1).

Множество всех векторных функций  $z(t) = (z_1(t), \dots, z_m(t))$  заданного размера ( $m$ ) будем понимать как множество решений тривиальной (без уравнений) системы. Диффеотоп такой системы будем обозначать  $\mathcal{J}^\infty$  и называть *пространством бесконечных джетов функций  $z(t)$* .

*Гладким отображением* из диффеотопа  $\mathcal{E}^\infty$  в диффеотоп  $\mathcal{S}^\infty$  называют такое отображение

$$(9) \quad F : \mathcal{E}^\infty \longrightarrow \mathcal{S}^\infty,$$

для которого индуцированное отображение  $F^*$  отображает гладкие функции в гладкие, т.е.  $F^*(\mathcal{F}(\mathcal{S})) \subset \mathcal{F}(\mathcal{E})$ , где  $F^*(g) = g \circ F$ . Отображение (9) называется *диффеоморфизмом*, если оно гладкое, взаимнооднозначное, и обратное отображение также является гладким.

Диффеоморфизм (9) называется  *$\mathcal{C}$ -диффеоморфизмом* [2] (или *изоморфизмом Ли–Бэклунда*, или *орбитальной эквивалентностью* [1]), если

$$(10) \quad F_*(\mathcal{C}_\theta(\mathcal{E})) = \mathcal{C}_{F(\theta)}(\mathcal{S}), \quad \forall \theta \in \mathcal{E}^\infty.$$

При этом  *$\mathcal{C}$ -диффеоморфными* называются системы, чьи диффеотопы связаны  $\mathcal{C}$ -диффеоморфизмом.

Так как интегральные кривые распределения Картана совпадают с графиками решений соответствующей системы, то из условия (10) следует, что любой  $\mathcal{C}$ -диффеоморфизм отображает графики решений одной системы в графики решений другой системы. Таким образом,  $\mathcal{C}$ -диффеоморфные системы — это эквивалентные системы.

Гладкое отображение (9) называется *накрытием*, если в каждой точке  $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ :

- (а) касательное отображение  $F_{*,\theta}$  является эпиморфизмом векторных пространств;
- (б) выполняется условие (10);

(с) размерность ядра  $F_{*,\theta}$  постоянна.

*Размерностью накрытия* называется размерность ядра  $F_{*,\theta}$ . Если (9) — накрытие, а  $\mathcal{E}^\infty$  и  $\mathcal{S}^\infty$  — диффеотопы систем  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{S}$  соответственно, то говорят, что система  $\mathcal{E}$  *накрывает* систему  $\mathcal{S}$ , или что  $F$  — *накрытие системы  $\mathcal{S}$  системой  $\mathcal{E}$* .

*Преобразованием Бэклунда* между уравнениями  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{S}$  называется [2] следующая диаграмма, в которой отображения  $\tau$  и  $\tau'$  являются накрытиями:

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\mathcal{E}}^\infty & \\ \tau \swarrow & & \searrow \tau' \\ \mathcal{E}^\infty & & \mathcal{S}^\infty \end{array} .$$

Заметим, что преобразование Бэклунда между системами  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{S}$  переводит каждое решение системы  $\mathcal{E}$  в набор решений системы  $\mathcal{S}$ . Этот набор определяется слоем накрытия  $\tau$ .

### 3. Некоторые применения

**Теорема 1.** [1] Система (1) плоская в окрестности точки  $\theta \in \mathcal{E}^\infty$  тогда и только тогда, когда существует  $\mathcal{C}$ -диффеоморфизм  $F$  из окрестности этой точки в открытое подмножество пространства бесконечных джетов, сохраняющий независимую переменную:  $F^*(t) = t$ .

Система с управлением называется *орбитально плоской* [1] в области  $\mathcal{O}^{(l)}$ , если существует  $\mathcal{C}$ -диффеоморфизм области  $\mathcal{O}^{(l)}$  в открытое подмножество пространства бесконечных джетов.

**Теорема 2.** [3] Динамическая обратная связь (3) системы (1) определяет конечномерное накрытие этой системы системой (4). А любое конечномерное накрытие системы (1) определяет ее динамическую обратную связь.

**Теорема 3.** [3] Регулярная система (1) динамически линеаризуема в окрестности точки  $\theta$  ее диффеотопа тогда и только тогда, когда существует конечномерное накрытие из некоторого открытого подмножества пространства бесконечных джетов в окрестность точки  $\theta$ .

Рассмотрим конечномерное накрытие  $F$  из некоторой системы  $\mathcal{E}$  на систему (6). Пусть  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_q)$  — координаты в слоях накрытия  $F$  в окрестности рассматриваемой точки. Тогда производные переменных  $\zeta$  в силу системы  $\mathcal{E}$  являются функциями от  $t, \zeta, z, \dot{z}, \dots, z^{(l)}$  для некоторого  $l \geq 0$ . Таким образом, в переменные  $t, \zeta, z$  система  $\mathcal{E}$  имеет вид

$$(11) \quad \dot{z} = g_1(t, z, v), \quad \dot{\zeta} = b(t, \zeta, z, \dot{z}, \dots, z^{(l)}).$$

Будем говорить, что система (6)-(7) является *орбитальной декомпозицией* системы (1), если диффеотопы этих двух систем связаны некоторым  $\mathcal{C}$ -диффеоморфизмом.

**Теорема 4.** [4] Система  $\mathcal{E}$  допускает орбитальную декомпозицию вида (11) тогда и только тогда, когда существует конечномерное накрытие из системы  $\mathcal{E}$  на систему (6).

Заметим, что выход  $y$  системы (1)-(2) может удовлетворять некоторой системе дифференциальных уравнений. Будем называть эту систему *системой на выходы*.

**Теорема 5.** В окрестности регулярной точки системы (1)-(2) отображение вход – выход есть преобразование Бэклунда

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{E}^\infty & \\ \tau_u \swarrow & & \searrow \tau_y \\ J^\infty & & \mathcal{Y}^\infty \end{array},$$

где  $\mathcal{E}^\infty$  — диффеотоп системы (1),  $J^\infty$  — пространство бесконечных джетов входов  $u$ ,  $\mathcal{Y}^\infty$  — диффеотоп системы на выходы  $y$ , накрытие  $\tau_u$  отображает точку  $(t, x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(k)}, \dots)$  в точку  $(t, u, u^{(1)}, \dots, u^{(k)}, \dots)$ , а накрытие  $\tau_y$  определяется соотношением (2).

## 4. Заключение

В докладе сформулированы только некоторые приложения бесконечных джетов в теории управления. Среди других применений упомянем условия достижимости и управляемости [5], понятие дифференциальной размерности нелинейных систем с управлением [6], условия орбитальной декомпозируемости систем и методы решения задач терминального управления [4]. Результаты, полученные алгебраическими методами [7], также могут быть сформулированы на языке бесконечных джетов. Разница между этими двумя подходами заключается в том, что в алгебраической теории используются мероморфные функции, а в теории бесконечных джетов — гладкие функции, причем результаты формулируются в окрестности точек общего положения, т.е. там, где функции, на которые мы делим, не равны нулю.

Кроме того, язык бесконечных джетов удобен для обобщения результатов на случай систем с запаздыванием [8] и систем с распределенными параметрами (см. [2, гл. 6, §6]). Поэтому упомянутые понятия и факты могут быть обобщены на системы этих типов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (19-07-00817а).

## Список литературы

1. Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P. A Lie–Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1999. Vol. 44, No. 5. P. 922-937.
2. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / А.В. Бочаров, А.М. Вербовецкий, А.М. Виноградов и др. М.: Факториал, 1997. 464 с.
3. Четвериков В.Н. Плоскостность динамически линеаризуемых систем // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 12. С. 1665-1674.
4. Белинская Ю.С., Четвериков В.Н. Симметрии, накрытия, декомпозиция систем и терминальное управление // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 11. С. 1477-1488.
5. Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Ollivier F., and Rouchon P. A remark on nonlinear accessibility conditions and infinite prolongations // Syst. Control Letters. 1997. Vol. 31, No. 2. P. 77-83.
6. Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P. Deux applications de la géométrie locale des diffiétés // Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 1997. Vol. 66. P. 275-292.
7. Conte G., Moog C. H., Perdon A.M. Algebraic Methods for Nonlinear Control Systems. London: Springer, 2006.
8. Четвериков В.Н. Плоские управляемые системы с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 12. С. 1667-1674.