УДК 519.688, 519.85

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ МАТРИЧНЫМИ НЕРАВЕНСТВАМИ

**А.И. Маликов**
*Институт механики и машиностроения – обособленное структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН,*
Россия, 420111, Казань, Лобачевского ул., 2/31
*Казанский национальный исследовательский технический университет им.А.Н.Туполева – КАИ,*
Россия, 420111, Казань, К. Маркса ул., 10
E-mail: a_i_malikov@mail.ru

**Д.И. Дубакина**
*Казанский национальный исследовательский технический университет им.А.Н.Туполева – КАИ,*
Россия, 420111, Казань, К. Маркса ул., 10
E-mail: dubakinadiana@gmail.com

**Ключевые слова:** оценивание состояния, синтез управления, дифференциальные линейные матричные неравенства, задача оптимизации, численное решение.

**Аннотация:** Для нелинейных систем с неопределенными возмущениями ряд задач анализа динамики, оценивания фазового состояния, синтеза управления могут быть сведены к задачам оптимизации с дифференциальными линейными матричными неравенствами. С использованием итерационных формул разностной аппроксимации производных предлагаются численные способы решения таких задач путем их дискретизации на рассматриваемом интервале и сведения к совокупности взаимосвязанных задач оптимизации в дискретные моменты времени с ограничениями в виде линейных матричных неравенств. Для решения этих задач применяются существующие программные средства полуопределенного программирования. При этом гарантируется выполнение ограничений не только в точках дискретизации но и во всех промежуточных точка рассматриваемого интервала времени.

## 1. Введение

Благодаря развитию за последние 20 лет техники полуопределенного программирования и созданию на ее основе эффективных решателей задач оптимизации с линейными матричными неравенствами (ЛМН) [1, 2], многие задачи анализа динамики, оценивания состояния и синтеза управления линейных автономных систем были решены путем их сведения к задачам оптимизации с ЛМН [1, 3]. В последние годы для линейных неавтономных систем активно развиваются методы анализа устойчивости, ограниченности на конечном интервале времени и синтеза управления, основанные на технике дифференциальных линейных матричных неравенств (ДЛМН) [4]. Также на основе метода матричных систем сравнения и техники ДЛМН в [5, 6] предложены способы оценивания состояния, анализа устойчивости и ограниченности относительно заданных множеств, нахождения инвариантных эллипсоидов и синтеза управления в виде обратной связи по состоянию для неавтономных нелинейных липшицевых систем. Задачи синтеза наблюдателей состояния, синтеза управлений, обеспечивающих ограниченность относительно заданных множеств, подавление начальных отклонений и неопределенных внешних возмущений тоже сводятся к задачам оптимизации с ДЛМН [7-10]. Для применения разработанных методов к конкретным системам нужны эффективные алгоритмы и программное обеспечение для численного решения задач оптимизации с ДЛМН.

В работе предлагаются численные методы и алгоритмы решения задач оптимизации с ограничениями в виде ДЛМН. Они основаны на применении различных способов разностной аппроксимации производных для дискретизации ДЛМН на равномерной сетке по времени, в результате чего исходная задача представляется в виде совокупности задач оптимизации с ЛМН. Далее с применением современных решателей последовательно находятся решения задач с сохранением симметричности и положительной определенности численного решения и отрицательной определенности ДЛМН как в точках дискретизации, так и во всех промежуточных точках на дискретных интервалах времени.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается дифференциальное линейное матричное неравенство

(1) $$-dQ(t)/dt + AQ(t) + Q(t)A^T + BY(t) + Y^T(t)B^T + \alpha Q(t) + DD^T/\alpha \le 0,$$

где $A - n\times n$, $B - n\times m$, $D - n\times r$ – заданные матрицы, в общем случае зависящие от времени, $Q(t) - n\times n$, $Y(t) - m\times n$ - искомые матричные функции, $Q(t_0) \ge Q_0$, $Q_0$ – заданная положительно определенная $n\times n$-матрица, $\alpha > 0$ - параметр, $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Ставится задача оптимизации 1:

$$trace Q(t) \to \min$$

при ограничениях (1) и

(2) $$Q(t_0) \ge Q_0,\ Q(t) > 0,\ t \in [t_0, t_0 + T].$$

К такой задаче сводится [4,5] задача синтеза управления в виде обратной связи по состоянию $u(t) = K(t)x(t)$ для линейной системы

(3) $$dx/dt = A(t)x + B(t)u(t) + D(t)w(t),$$

обеспечивающего в каждый момент времени $t \in [t_0, t_0 + T]$ оптимальное подавление начальных отклонений из заданного эллипсоида

(4) $$x(t_0) = x_0 \in E(Q_0) = \{x \in R^n : x^T Q_0^{-1} x \le 1\}$$

и всех неопределенных возмущений $w(t)$, ограниченными по норме:

(5) $$\|w(t)\| \le 1,\ t \in [t_0, t_0 + T].$$

Если $Q(t) > 0, Y(t)$ – решение задачи оптимизации 1, то матрица $K(t)$ определится как $K(t) = Y(t)Q^{-1}(t)$, а матрица $Q(t) > 0$ определяет эволюционирующий во времени инвариантный эллипсоид $E(Q(t)) = \{x \in R^n : x^T Q^{-1}(t) x \le 1\}$, ограничивающий состояния исходной системы (3) с начальными данными $x_0 \in E(Q_0)$ при всех допустимых возмущениях из (5).

Напомним, инвариантным эллипсоидом для динамической системы (3) называется эллипсоид

(6) $$E(Q(t)) = \{x \in R^n : x^T Q^{-1}(t) x \le 1\},\ Q(t) > 0,$$

обладающий следующим свойством: любая траектория $x(t,t_0,x_0)$ системы (3), исходящая из точки $x(t_0) = x_0 \in E(Q(t_0))$, в любой момент времени $t \in [t_0, t_0 + T]$ принадлежит этому эллипсоиду, т.е. $x(t,t_0,x_0) \in E(Q(t))$.

К подобной задаче оптимизации с ДЛМН ограничениями также сводятся задачи синтеза управления, обеспечивающего ограниченность на конечном интервале относительно заданных в виде эллипсоидов множеств начальных отклонений из $E(R_0)$ и допустимых траекторий $E(R(t))$ ($R_0, R(t)$ - заданные положительно определенные матрицы) линейной автономной системы [4], системы с липшицевыми нелинейностями и неопределенными ограниченными по норме возмущениями [5]; задачи нахождения минимального эволюционирующего инвариантного эллипсоида автономных систем с липшицевыми нелинейностями и неопределенными ограниченными по норме возмущениями [5]. Также к оптимизации с ДЛМН сводятся задачи синтеза управления в виде обратной связи по состоянию, обеспечивающего на конечном интервале $H_\infty$-свойство при неопределенных возмущениях [6], синтеза наблюдателей состояния и неизвестных входов нелинейных систем [7-10]. При этом могут учитываться дополнительные ограничения в виде ЛМН. В частности ограничение на управление $u^T Z^{-1} u \le 1$, где $Z$ – заданная положительно определенная матрица, может быть учтено в виде ЛМН

(7) $$\begin{bmatrix} Z & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \ge 0.$$

# 3. Численное решение задачи оптимизации с ДЛМН

## 3.1. Случай автономной системы

Пусть матрицы $A, B, D$ исходной системы (2) не зависят от времени, а пара $(A,B)$ - управляема.

При численном решении задачи оптимизации с ДЛМН проводится дискретизация на рассматриваемом интервале $[t_0, T]$. Используются итерационные формулы разностной аппроксимации производных. При замене производной $dQ/dt$ в момент $t_k = t_0 + kh$ левой конечной разностью $(dQ/dt)_{t=t_k} \approx (Q_k - Q_{k-1})/h$, $k = 1,\ ...,N$, $h$ – шаг дискретизации ($h = T/N$) ДЛМН (1) в момент времени $t_k = t_0 + kh$ представляется как

(8) $$Q_{k-1} - Q_k + h(AQ_k + Q_k A^T + BY_k + Y_k^T B^T + \alpha Q_k + DD^T/\alpha) \le 0,$$

где индекс $k$ указывает, что значения соответствующей матрицы или переменной берется в момент $t_k$, $Q_{k-1}$ – матрица, определяемая на предыдущем шаге, причем $Q(t_0) \ge Q_0$ ($Q_0$ – матрица, заданная в условии (2). А при замене производной $dQ/dt$ в момент $t_{k-1} = t_0 + (k-1)h$ правой конечной разностью $(dQ/dt)_{t=t_{k-1}} \approx (Q_k - Q_{k-1})/h$, $(k = 1,\ ...,N)$ ДЛМН (1) в момент времени $t_k$ представляется как

(9) $$Q_{k-1} - Q_k + h(AQ_{k-1} + Q_{k-1}A^T + BY_{k-1} + Y_{k-1}^T B^T + \alpha Q_{k-1} + DD^T/\alpha) \le 0.$$

Точность метода на каждом шаге составляет $h^2$. Матрицы $Q_k, Y_k \quad (k = 1,..., N)$ вычисляются в результате решения на *k*-м шаге при фиксированных значениях $\alpha$ задачи оптимизации 2: минимизировать $\mathrm{trace}(Q_k)$ при ограничениях $Q_k > 0$, и ЛМН (8), (9).

Для этого используется программное обеспечение CVX или другие решатели задач полуопределенного программирования.

Пусть $Q_k, Y_k$ – решения задачи оптимизации 2 при $k = 1,..., N$. По найденным значениям $Q_k, Y_k \ (k = 1,..., N)$, определяются матричные функции $Q(t), Y(t)$ при $t \in [t_{k-1}, t_k]$:

(10) $$Q(t) = [(t - t_{k-1})Q_k + (t_k - t)Q_{k-1}]/h, \ Y(t) = [(t - t_{k-1})Y_k + (t_k - t)Y_{k-1}]/h.$$

Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 1.** *Определенные в* (10) *матричные функции* $Q(t), Y(t)$, *удовлетворяют ДЛМН* (1) *и ЛМН* (2), (7).

## 3.2. Случай неавтономной системы

Пусть элементы матрицы $A(t), B(t), D(t)$ исходной системы (2) являются непрерывными функциям времени, а пара $(A(t), B(t))$ - управляема при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$. Предположим также, что при любых $t', t'' \in [t_0, t_0 + T]$ матричные функции $A(t), B(t), D(t)$ удовлетворяют или равномерной ограниченности производных по времени (при дифференцируемости) или условию Липшица:

(11) $$\|A(t') - A(t'')\| \le l_A |t' - t''|, \|B(t') - B(t'')\| \le l_B |t' - t''|, \|D(t') - D(t'')\| \le l_D |t' - t''|,$$

где $l_A, l_B, l_D$ – известные положительные константы.

В результате дискретизации и замены производной $dQ/dt$ левой и правой конечной разностью $(dQ/dt)_{t=t_k} \approx (Q_k - Q_{k-1})/h$, $(dQ/dt)_{t=t_{k-1}} \approx (Q_k - Q_{k-1})/h$, $k = 1, ..., N$, исходная задача оптимизации с ДЛМН аппроксимируется в дискретные моменты времени $t_k, k = 1, ..., N$ следующей задачей оптимизации 3: минимизировать $\mathrm{trace}(Q_k)$ при ограничениях $Q_k > 0$, и ЛМН (12)–(15):

(12) $$\frac{Q_{k-1} - Q_k}{h} + A_k Q_k + Q_k A_k^T + B_k Y_k + Y_k^T B_k^T + D_k D_k^T / \alpha + \alpha Q_k \le 0,$$

(13) $$\frac{Q_{k-1} - Q_k}{h} + A_{k-1} Q_{k-1} + Q_{k-1} A_{k-1}^T + B_{k-1} Y_{k-1} + Y_{k-1}^T B_{k-1}^T + D_{k-1} D_{k-1}^T / \alpha + \alpha Q_{k-1} \le 0,$$

(14) $$\frac{Q_{k-1} - Q_k}{h} + A_k Q_{k-1} + Q_{k-1} A_k^T + B_k Y_{k-1} + Y_{k-1}^T B_k^T + \frac{D_k D_{k-1}^T + D_{k-1} D_k^T}{2\alpha} + \alpha Q_{k-1} \le 0,$$

(15) $$\frac{Q_{k-1} - Q_k}{h} + A_{k-1} Q_k + Q_k A_{k-1}^T + B_{k-1} Y_k + Y_k^T B_{k-1}^T + \frac{D_k D_{k-1}^T + D_{k-1} D_k^T}{2\alpha} + \alpha Q_k \le 0.$$

Здесь индекс *k* указывает, что значения соответствующей матрицы или переменной берется в момент $t_k$, $Q_{k-1}, Y_{k-1}$ – матрицы, определяемые на предыдущем шаге, причем $Q(t_0) \ge Q_0$.

При выполнении предположения (11) показано, что определенные в (10) на решении $Q_k, Y_k \ (k = 1,..., N)$ задачи оптимизации 3 матричные функции $Q(t), Y(t)$ удовлетворяют ДЛМН (1) и ЛМН (2), (7).

Утверждение 1 позволяет заменить решение задачи оптимизации 1 субоптимальным решением (10), получаемым по решениям взаимосвязанной совокупности задач оптимизации 2 или 3 в дискретные моменты времени. В качестве иллюстрации рассмотрен пример системы второго порядка, для которой получены численные решения задач оптимизации 2 и 3 при различных значениях $h$.

## 4. Заключение

С использованием итерационных формул разностной аппроксимации производных предлагаются способы численного решения задач оптимизации с дифференциальными линейными матричными неравенствами путем их дискретизации на рассматриваемом интервале и сведения к совокупности взаимосвязанных задач оптимизации в дискретные моменты времени с ограничениями в виде линейных матричных неравенств. Для решения этих задач применяются существующие программные средства полуопределенного программирования. При этом гарантируется удовлетворение ограничений не только в точках дискретизации но и во всех промежуточных точка рассматриваемого интервала времени.

В автономном случае для наибольшего убывания критерия оптимизации следует в начале интервала использовать небольшой шаг, затем его можно увеличивать по мере прохождения второй четверти интервала.

В неавтономном случае при условии липшицевости параметров исходной системы, или при равномерной ограниченности производной по времени параметров системы (ограниченности скорости их изменения) полученные приближенные решения за счет выбора шага дискретизации будут аппроксимировать решение исходной задачи оптимизации с требуемой точностью.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (18-08-01045а) и программы президиума РАН № 30 «Теория и технологии многоуровневого децентрализованного группового управления в условиях конфликта и кооперации»

## Список литературы

1. Boyd S., Ghaoui L. E., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
2. Boyd S., Vandenberghe L. Convex optimization. Cambridge Univ. Pr., 2004.
3. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях. М.: ЛЕНАНД, 2014.
4. Amato F. Ambrosino R., Ariola M., Cosentino C., De Tommasi G. Finite time stability and control / Lecture Notes in Control and Information Science. London: Springer, 2014.
5. Маликов А.И. Оценивание состояния и стабилизация непрерывных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями // Автоматика и телемеханика. 2016. № 5. С. 19-36.
6. Маликов А.И. Управление на конечном интервале непрерывных неопределенно-нелинейных систем с $H_\infty$-критерием качества // Известия РАН. Теория и системы управления. 2017. № 3. С. 12-33.
7. Маликов А.И. Синтез наблюдателей состояния для нелинейных Липшицевых систем с неопределенными ограниченными по $L_\infty$ норме возмущениями // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. 2016. № 3. С. 128-140.
8. Маликов А.И. Синтез наблюдателей состояния по результатам измерений для нелинейных Липшицевых систем с неопределенными возмущениями // Автоматика и телемеханика. 2017. № 5. С. 16-35.
9. Malikov A.I. State and Unknown Inputs Finite Time Estimation for Time-Varying Nonlinear Lipschitz Systems with Uncertain Disturbances // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50, No. 1. P. 1439-1444.

10. Маликов А.И. Синтез наблюдателей состояния и неизвестных входов для нелинейных липшицевых систем с неопределенными возмущениями // Автоматика и телемеханика. 2018. № 3. С. 21-43.