УДК 681.513

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА БАЗЕ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ (Теория)

Ю.К. Машунин
Дальневосточный федеральный университет
Россия, 690920, Владивосток, о-в Русский, Кампус ДВФУ, корпус G, ауд. 525
E-mail: mashunin@mail.ru

Ключевые слова: анализ, синтез, техническая система, векторная оптимизация, оптимальное принятие решений

Аннотация: Представлен математический аппарат системного анализа, синтеза и принятия оптимального решения при выборе оптимальных параметров технической системы на базе векторной оптимизации. Математическая модель технической системы построена с учетом условий определенности и неопределенности. Методы решения векторных задач, основаны на нормализации критериев, принципе гарантированного результата, позволяющие решать задачу при равнозначных критериях и заданном приоритете критерия. Численная реализация системного анализа, синтеза и принятия оптимального решения для класса векторных задач показана на примере технической системы, модель которой представлена векторной задачей нелинейного программирования, сформированной в условиях определенности и неопределенности. Для решения такого класса задач разработано программное обеспечение в системе MATLAB, во-первых, для преобразования векторной задачи из условий неопределенности в условия определенности с использованием регрессионного анализа, и, во-вторых, для решения построенных векторных задач нелинейного программирования.

1. Введение

Исследование и проектирование технических систем (ТС) в настоящее время связано с созданием математических моделей и моделирования на их основе. Проблеме моделирования ТС на базе решения векторных задач математического программирования уделяется большое внимание, как за рубежом [1-4], так и в России [5-15].

Цель данной работы – Построение математической модели технической системы в условиях определенности и неопределенности. Представление методологии системного анализа, синтеза и принятия оптимального решения в технических системах на базе векторной оптимизации. Численная реализация системного анализа и принятия оптимального решения технической системы, модель которой представлена векторной задачей нелинейного программирования.

Для реализации поставленной цели в работе рассмотрены и решены следующие задачи:

- постановка задачи: построение математической модели технической системы в условиях определенности и неопределенности в виде векторной задачи математического программирования [7, 9, 13];
- представлена методология системного анализа, синтеза и принятия оптимального решения, которая построена на методах решения векторных задач, основанных на

нормализации критериев, принципе гарантированного результата, позволяющие решать задачу при равнозначных критериях и заданном приоритете критерии [11, 13, 14];

- численная реализация системного анализа и принятия оптимального решения для класса векторных задач, на примере технической системы, модель которой представлена векторной задачей нелинейного программирования, сформированной в условиях определенности и неопределенности [9, 13, 15];
- разработано программное обеспечение в системе Matlab [16], во-первых, для преобразования векторной задачи в условиях неопределенности в условия определенности с использованием регрессионного анализа, и, во-вторых, решения полученных векторных задач нелинейного программирования.

2. Математическая модель технической системы, методы решения

2.1. Математическая модель технической системы с условиями определенности и неопределенности

Математическая модель технической системы исследуется с условиями определенности и неопределенности в соответствии с работами [9, 12, 14].

Условия определенности определяются тем, что известна функциональная зависимость каждой характеристики и ограничений от параметров технической системы [7, 11].

Условия неопределенности характеризуются тем, что исходные данные, характеризующие техническую систему, могут быть представлены следующими вариантами: а) случайными данными, б) нечеткими, или, в) не полными данными. Таким образом, у нас отсутствует достаточная информация о функциональной зависимости каждой характеристики и ограничений от параметров [9, 12, 14]. Предполагается, что исходные данные вариантов а) и б) могут (и должны) быть преобразованы к варианту в) и представлены в виде таблицы. В работе исследуется вариант в) - с не полными данными, которые, как правило, получены из экспериментальных данных.

В реальной жизни условия определенности и неопределенности совмещаются. Модель технической системы так же должна отражать эти условия. Мы представим модель технической системы в условиях определенности и неопределенности в совокупности:

(1) $$Opt\, F(X) = \{\mathbf{max}\, F_1(X) = \{\mathbf{max}\, f_k(X),\ k = \overline{1, K_1^{def}}\},$$

(2) $$\mathbf{max}\, I_1(X) \equiv \{\mathbf{max}\{f_k(X_i,\ i=\overline{1,M})\}^{\mathrm{T}},\ k=\overline{1, K_1^{unc}}\},$$

(3) $$\mathbf{min}\, F_2(X) = \{\mathbf{min}\, f_k(X),\ k = \overline{1, K_2^{def}}\},$$

(4) $$\mathbf{min}\, I_2(X) \equiv \{\mathbf{min}\{f_k(X_i,\ i=\overline{1,M})\}^{\mathrm{T}},\ k=\overline{1, K_2^{unc}}\}\},$$

при ограничениях $G(X)=B$,

(5) $$f_k^{\min} \le f_k(X) \le f_k^{\max},\ k=\overline{1,K},$$

(6) $$x_j^{\min} \le x_j \le x_j^{\max},\ j = \overline{1,N},$$

где:

$X=\{x_j,\ j=\overline{1,N}\}$ – вектор управляемых переменных (конструктивных параметров); $F_1(X)=\{f_k(X),\ k=\overline{1,K_1^{def}}\}$, $F_2(X)=\{f_k(X),\ k=\overline{1,K_2^{def}}\}$ – множество функций *max* и *min* соответственно;

$I_1(X)=\{\{f_k(X_i,\ i=\overline{1,M})\}^{\mathrm{T}},\ k=\overline{1,K_1^{unc}}\}$, $I_2(X)=\{\{f_k(X_i,\ i=\overline{1,M})\}^{\mathrm{T}},\ k=\overline{1,K_2^{unc}}\}$ – множество матриц *max* и *min* соответственно; K_1^{def}, K_2^{def} (*definiteness*), K_1^{unc}, K_2^{unc} (*uncertainty*) множество критериев *max* и *min* сформированные в условиях определенности и неопределенности;

$G(X)=(g_1(X)\ g_2(X)\ \ldots\ g_M(X))^{\mathrm{T}}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование системы; они определяются протекающими в технической системе технологическими, физическими и тому подобными процессами;

в (5) $f_k^{\min}\le f_k(X)\le f_k^{\max}$, $k=\overline{1,K}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование технической системы;

в (6) $x_j^{\min}\le x_j\le x_j^{\max}$, $j=\overline{1,N}$ – параметрические ограничения.

Предполагается, что функции $f_k(X)$, $k=\overline{1,K}$, дифференцируемы и выпуклы, $g_i(X)$, $i=\overline{1,M}$ непрерывны, а заданное ограничениями (5)-(6) множество допустимых точек $\boldsymbol{S}$ не пусто и представляет собой компакт:

$$\boldsymbol{S}=\{X\in\boldsymbol{R}^N \mid G(X)\le 0,\ X^{\min}\le X\le X^{\max}\}\ne\emptyset.$$

Отсюда, точка оптимума по каждому критерию существует, причем такая точка только одна.

Требуется найти такой вектор параметров $X^o\in\boldsymbol{S}$, при котором каждый критерий принимает минимальное значение. Для решения такого класса ВЗМП используются методы, основанные на нормализации критериев и принципе гарантированного результата [6, 14].

2.2. Методология системного анализа, синтеза и принятия оптимального решения

Методология базируется на аксиоматике и методах решения задачи векторной оптимизации [14] и включает три блока:

системного анализа, оценивающего ТС с различных точек зрения (критериев) и состоящего из трех шагов;

синтеза, который объединяет результаты анализа в построенной λ-задаче;

принятия решения, решения λ-задачи.

Блок 1. Системный анализ.

Шаг 1. Решается задача (1)-(6) по каждому критерию отдельно.

В результате решения получим: X_k^* – точку оптимума по соответствующему критерию, $f_k^*=f_k(X_k^*)$ – величина k-го критерия в этой точке.

Результат решения X_k^*, $f_k^*=f_k(X_k^*)$ показывает, как поведет себя система по каждому критерию, т.е. выполняется системный анализ.

Величины f_k^* могут служить целями для каждого исследуемого объекта и определяют направленность по каждому критерию.

Шаг 2. Определяем наихудшую величину f_k^0 каждого критерия $k=\overline{1,K}$ (антиоптимум). Для этого каждый критерий умножается на минус единицу и решается задача (1)-(6) для каждого критерия. В результате решения получим: X_k^0 – точка антиоптимума по соответствующему критерию, $f_k^0=f_k(X_k^0)$ – величина k-го критерия в этой точке.

Шаг 3. Выполняется системный анализ множества точек, оптимальных по Парето, для этого в оптимальных точках $X^*=\{X_k^*,\ k=\overline{1,K}\}$, полученных на первом шаге, определяются величины целевых функций:

$$F(X^*) = \left\| f_q(X_k^*) \right\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}},$$

и относительных оценок:

$$\lambda(X^*) = \left\| \lambda_q(X_k^*) \right\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}},$$

где $\lambda_k(X)$, $k \in \boldsymbol{K}$ – относительная оценка точки $X \in \boldsymbol{S}$ по k-му критерию:

$$\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^o}{f_k^* - f_k^o},\ k \in \boldsymbol{K};$$

f_k^* – оптимальная величина k-го критерия, полученная на первом шаге, f_k^0 – оптимальная величина k-го критерия, полученная на втором шаге.

Величины $F(X^*)$, $\lambda(X^*)$ являются результатом системного анализа, который показывает, что каждый критерий, измеренный в относительных единицах $\lambda_k(X)$, $k=\overline{1,K}$ лежит в пределах $0 \le \lambda_k(X) \le 1$, $k=\overline{1,K}$. И встает задача принятия решений решения, в которой для всех критериев $k=\overline{1,K}$ нижний уровень $\lambda = \min\limits_{k \in K} \lambda_k(X)$, был как можно выше, т. е. каждый критерий, измеренный в относительных единицах был как можно ближе к единице (100%). На решение этой проблемы и направлен следующий блок.

Блок 2. Синтез и построение λ-задачи

Ш а г 4. Построение λ-задачи осуществляется в два этапа. На первом этапе выполняется построение максиминной задачи оптимизации. Используем характеристику: «Минимальный относительный уровень λ», который объединяет все критерии, измеренные в относительных единицах. Минимальный относительный уровень λ определяется по формуле:

(7) $$\forall X \in \boldsymbol{S}\ \lambda = \min_{k \in K} \lambda_k(X),$$

что соответствует неравенствам:

(8) $$\lambda \le \lambda_k(X),\ k=\overline{1,K} \text{ или } \lambda - \lambda_k(X) \le 0,\ k=\overline{1,K}.$$

Этот нижний уровень λ максимизируем по $X \in S$. В итоге построили максиминную задачу оптимизации с нормализованными критериями:

(9) $$\lambda^o = \max_{X \in S} \min_{k \in K} \lambda_k(X).$$

где λ^o – максимальный нижний уровень критериев в относительных оценках.

Максиминная задача (9) объединила все критерии, в совокупности, т.е. выполнила процедуру синтеза.

На втором этапе максиминная задача (9), используя взаимосвязь выражений (7) и (8), преобразуется в однокритериальную задачу:

(10) $$\lambda^o = \max_{X \in S} \lambda,\ \lambda - \lambda_k(X) \le 0,\ k=\overline{1,K},$$

где общий вектор неизвестных $\boldsymbol{X}$ имеет размерность N+1: $\boldsymbol{X} = \{\lambda, x_1, \dots, x_N\}$.

Блок 3. Принятие оптимального решения

Ш а г 5. Решение λ-задачи (10), которая является стандартной задачей выпуклого программирования и для ее решения используются известные методы.

В результате получаем: $\boldsymbol{X^o}=\{\lambda^o, X^o\}$ – точку оптимума, $f_k(X^o)$, $\lambda_k(X^o)$, $k=\overline{1,K}$ – величины критериев и относительных оценок в этой точке $\boldsymbol{X^o}$;

$\lambda^o = \dfrac{f_k(X^o)-f_k^o}{f_k^*-f_k^o}$ – максимальную относительную оценку, которая является максимальным нижним уровнем для всех относительных оценок $\lambda_k(X^o)$ или гарантированным результатом в относительных единицах. Величина λ^o гарантирует, что в точке X^o все относительные оценки $\lambda_k(X^o)$ больше или равны λ^o:

$$\lambda_k(X^o) \geq \lambda^o,\ k=\overline{1,K} \text{ или } \lambda^o \leq \lambda_k(X^o),\ k=\overline{1,K}.$$

Точка $\boldsymbol{X^o}=\{\lambda^o, x_1,\ldots, x_N\}$ оптимальна по Парето[6, 14].

В совокупности пять шагов представляют "*Методологию системного анализа, синтеза и принятия оптимального решения*" на базе векторной задачи. Численная реализация методологии системного анализа и принятия оптимального решения представлена для технической системы, модель которой представлена векторной задачей нелинейного программирования. Численная реализация данной методологии представлена во второй работе.

Список литературы

1. ParetoV. Cours d'Economie Politique. Lausanne: Rouge, 1896.
2. Верма Г., Вебер М. AutoCAD Electrical 2016. Подключаем 3D. СПб.: ДМК-Пресс, 2016. 384 с.
3. Johannes J. Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2010. 460 p.
4. Ansari Q., Jen-Chih Y. Recent Developments in Vector Optimization. Heidelberg, Dordrecht, London, New York: Springer, 2010. 550 p.
5. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981, 217 с.
6. Машунин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации. М.: Наука, 1986. 141 с.
7. Машунин Ю.К., Левицкий В. Л. Методы векторной оптимизации в анализе и синтезе технических систем. Владивосток: ДВГАЭУ. 1996. 131 с.
8. Машунин Ю.К. Решение композиционных и декомпозиционных задач синтеза сложных технических систем методами векторной оптимизации // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 3. С. 88-93.
9. Машунин Ю.К., Машунин К.Ю. Моделирование технических систем в условиях неопределенности и принятие оптимального решения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2013. № 4. С. 19-35.
10. Машунин Ю.К. Теория управления. Математический аппарат управления в экономических системах. М.: Логос. 2013. 448 с.
11. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (1. At equivalent criteria) // International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 2014. Vol. 3, No. 9. P. 84-96.
12. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (2. with a Criterion Priority) // International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 2014. Vol. 3, No. 10. P. 224-240.
13. Mashunin Yu.K., Mashunin K.Yu. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems // American Journal of Modeling and Optimization. 2015. Vol. 3, No. 3. P. 56-67.
14. Mashunin Yu.K., Mashunin K.Yu. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems (2. The Decision with a Criterion Priority) // American Journal of Modeling and Optimization. 2016. Vol. 4, No. 2. P. 51-66.
15. Машунин Ю.К., Машунин К. Ю. Векторная оптимизация с равнозначными критериями и с заданным приоритетом критерия // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 6. С. 80-99.
16. Кетков Ю. Л., Кетков А.Ю., Шульц М. М.. МАТЛАБ 6.х.: программирование численных методов. СПб.: БХВ-Петербург, 2004. 672 с.