

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

В.Ф. Губарев

Институт космических исследований НАНУ-ГКАУ
Украина, 03187, Киев, пр. Глушкова, 40, к. 4/1
E-mail: v.f.gubareb@gmail.com

Ключевые слова: моделирование, идентификация, сложные системы, стандартизированное описание, усеченные модели, ядерный оператор, метод подпространства, регуляризация, регуляризованное решение

Аннотация: Предложено и обосновано унифицированное описание сложных систем на основе функций Грина. Базисное разложение функций положения в случае конечного числа измеряемых и управляемых параметров позволяет получить модели таких систем в виде соотношений вход-выход с иррациональными в общем случае импульсными переходными матрицами. Для систем с ядерным оператором Ганкеля допускается рациональная аппроксимация, сходящаяся к точному описанию при стремлении к бесконечности размерности модели. Предложены модификации метода выделяемого подпространства, позволяющие корректно решать задачу идентификации и находить регуляризованное решение, согласованное по точности с погрешностью исходных данных.

1. Введение

Прежде всего поясним, что понимается под сложными системами. К таковым будем относить линейные бесконечномерные системы или конечномерные, но очень большой размерности, имеющие конечное число входных и выходных переменных. Именно такими в первую очередь являются системы с распределенными параметрами, а также сосредоточенные системы с иррациональными передаточными функциями, например, системы с запаздыванием.

С ориентацией на идентификацию наиболее подходящим для них является описание, в котором используется функция Грина, называемая еще функцией влияния или единичного источника. В представленной работе на его основе будут построены классы моделей в виде сходящихся к точному описанию бесконечных разложений. С использованием стандартизирующих функций, предложенных А.Г. Бутковским [1], все вышеуказанные системы можно свести к универсальному виду.

Так как точное описание соответствует бесконечной размерности, совершенно естественным является стремление построить приближенную модель максимально возможного порядка. Наличие погрешности в данных и при вычислениях не позволяет неограниченно увеличивать порядок модели. Начиная с некоторой размерности, задача идентификации становится некорректно поставленной. Предложено порядок модели рассматривать в качестве регуляризирующего параметра и его значение находить согласно процедурам регуляризации, описанным в настоящей работе.

Рассмотрены два близкие к реальным условиям способа получения экспериментальных данных, а именно, на коротком интервале наблюдения и конечном, но достаточно длинном. Для каждого из них предложены свои процедуры регуляризации, позволяющие строить усеченные модели, имеющие размерность, согласованную с по-

грешностями. При этом каждый параметр идентифицированной модели представляет в ней усредненный кластер мод системы генерирующей данные.

2. Моделирование сложных систем

Универсальное описание сложных систем может быть записано в виде

$$(1) \quad w(z, t) = \int_{t_0}^t \int_G H(z, \zeta, t, \tau) \bar{f}(\zeta, \tau) d\zeta d\tau,$$

где $w(z, t)$ – пространственно-временное состояние системы; $H(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ – функция Грина на четырех переменных; $f(\zeta, \tau)$ – стандартизирующая (обобщенная) функция, с помощью которых задачи с краевыми и другими условиями приводятся к стандартному виду; $t \geq t_0$ – время, а G – область, где протекают изучаемые процессы.

Системам с сосредоточенными параметрами соответствует отсутствие зависимости у всех функций от z и ζ и интегрирования по пространству. Тогда (1) становится хорошо известной формулой Коши с обобщенным воздействием [1]. В статических пространственно распределенных системах отсутствует зависимость от времени.

Разложением по базису заданного на множестве всех интегрируемых на G функций положения можно от (1) перейти к соотношениям вход-выход с передаточными матрицами, элементами которых как правило являются трансцендентные функции. Однако такое описание все равно остается неконструктивным для решения задач идентификации, хотя таким образом удалось объединить системы с сосредоточенными и распределенными параметрами при конечном числе измеряемых и управляемых параметров. Если рассматриваемые системы являются причинно обусловленными, то им можно поставить в соответствие оператор Ганкеля. Когда он является ядерным, то согласно [2] они хорошо аппроксимируются конечномерными моделями

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = A_n x + B_n u, \quad y = C_n x$$

размерности n , которые сходятся к точному описанию при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом пришли к классу моделей сложных систем в виде бесконечномерных разложений. При этом усеченные модели вида (2) являются приближенными к точному описанию. Наличие погрешностей измерения и возмущений на входе позволяет аппроксимировать (2) конечно-разностными уравнениями общепринятого вида. Тогда вместо (2) можно использовать дискретную модель, но при этом шаг квантования Δ должен согласовываться с n .

3. 4SID метод идентификации с регуляризацией

Поскольку класс моделей, описывающий динамику сложных систем, представлен в виде бесконечномерных или конечномерных, но большой размерности линейных систем уравнений в пространстве состояний, будет находиться приближенное решение задач идентификации, согласованное по точности с погрешностью исходных данных. Это продиктовано двумя обстоятельствами. В реальных условиях длительность пассивного или активного эксперимента по сбору необходимых для идентификации данных может быть большой, но всегда конечной, также как размерности векторов входных и выходных переменных. Поэтому невозможно обеспечить асимптотическую сходимость к

точному решению при стремлении числа данных к ∞ . Кроме того, хорошо известно, что при наличии погрешности в имеющихся данных будет существовать предельно допустимая размерность модели, после которой задача идентификации становится некорректно поставленной. Решение в таких случаях становится сильно чувствительным к погрешностям, т.е. практически непригодным. Поэтому предлагается находить усеченную модель предельно допустимой условием устойчивости размерности, которая и будет регуляризованным решением. Нахождению именно таких решений посвящена данная работа.

Наиболее подходящим для решения задачи идентификации при такой постановке является 4SID метод или метод выделяемого подпространства (subspace method), который на основе теории реализаций специально разработан для многомерных многосвязных систем с описанием в пространстве состояний. Его различные модификации описаны в литературе с обоснованием сходимости решения к модели, соответствующей точным данным при стохастической идентификации [3]. Здесь, опираясь на эти результаты, представлены способы построения приближенных регуляризованных решений без использования стохастической интерпретации погрешностей в данных. Предполагается, что исходные данные заданы на конечных (возможно больших) интервалах наблюдения, а о погрешностях известно только, что они ограничены по величине, т.е. компоненты вектора измерений $y(k)$ в произвольный момент k записывается как

$$(3) \quad \tilde{y}_i(k) = y_i(k) + \xi_i(k),$$

где $\xi_i(k)$ – погрешность измерения i -ой компоненты, которая удовлетворяет условию

$$(4) \quad |\xi_i(k)| \leq \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Рассматриваются две возможности получения исходных данных. Интервал наблюдения $[1, N]$ всегда конечный, но он не очень большой в первом случае, а во втором – может быть достаточно длительным. Тогда на коротком интервале данных может быть построена достаточно грубая приближенная модель, а во втором случае есть основания полагать, что получим более точное описание.

3.1. Регуляризованное решение на коротком интервале

Приближенное решение задачи идентификации будет определяться в первую очередь размерностью искомой модели. Именно размерность будет параметром регуляризации, обеспечивающим точность, согласованную с погрешностью (3), (4).

Пусть на рассматриваемом интервале допускается проведение активных экспериментов. Разобьем этот интервал на последовательность субинтервалов. На нечетных субинтервалах имеем кусочно-постоянное входное воздействие, а на четных свободное движение с нулевым входным сигналом. Длину субинтервалов свободного движения или интервалов релаксации выберем одинаковой, содержащей N_1 точек. Входной сигнал на интервалах возбуждения, а также его длительность могут быть произвольными. Целесообразно формировать его так, чтобы иметь информативное входное воздействие, например, реализуемое в виде бинарной случайной последовательности входных импульсов такой длительности, чтобы иметь разнообразие начальных состояний на интервалах релаксации.

Из измерений на интервалах релаксации сформируем матрицу

$$(5) \quad Y = \begin{bmatrix} \tilde{y}^{(1)}(1) & \tilde{y}^{(2)}(1) & \dots & \tilde{y}^{(R)}(1) \\ \tilde{y}^{(1)}(2) & \tilde{y}^{(2)}(2) & \dots & \tilde{y}^{(R)}(2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{y}^{(1)}(N_1) & \tilde{y}^{(2)}(N_1) & \dots & \tilde{y}^{(R)}(N_1) \end{bmatrix},$$

где $\tilde{y}^{(r)}(k)$ – вектор измерений в k -ой точке r -ого интервала релаксации.

Желательно, чтобы N_1 в (5) было таким, чтобы число строк матрицы Y превышало размерность предполагаемой искомой модели. Например, как показывают результаты моделирования, в определенных случаях достаточно выполнять условие $N_1 > 20$. Значение R в любых ситуациях должно превышать количество строк матрицы Y , т.е. $R > N_1 \cdot m$.

По аналогии с (5) запишем матрицу погрешностей

$$(6) \quad \Xi = \begin{bmatrix} \xi^{(1)}(1) & \xi^{(2)}(1) & \dots & \xi^{(R)}(1) \\ \xi^{(1)}(2) & \xi^{(2)}(2) & \dots & \xi^{(R)}(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi^{(1)}(N_1) & \xi^{(2)}(N_1) & \dots & \xi^{(R)}(N_1) \end{bmatrix}.$$

Примем следующее соглашение. Пусть имеем матрицы S и M размера $m \times n$. Тогда полагаем

$$S = |M| \Rightarrow s_{ij} = |m_{ij}|, \quad \forall i \in \overline{1, m}, \quad \forall j \in \overline{1, n},$$

$$S \leq |M| \Rightarrow s_{ij} \leq |m_{ij}|, \quad \forall i \in \overline{1, m}, \quad \forall j \in \overline{1, n},$$

где $|M|$ – матрица абсолютных значений. Тогда с учетом (3), (4) можем записать

$$(7) \quad |\Xi| \leq E,$$

где E – матрица, в которой элементы $\xi_i^{(r)}(k)$ матрицы (6) заменены на ε_i из (4).

Выполним сингулярное разложение (SVD) матрицы Y , в результате чего получим

$$(8) \quad Y = Q \Sigma V^T,$$

где Q и V – ортогональные матрицы, Σ – диагональная матрица сингулярных чисел, расположенных на диагонали в невозрастающем порядке. Все матрицы, входящие в правую часть (8), разобьем на блоки

$$Q = [Q_1, Q_2], \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}, \quad V = [V_1, V_2]$$

так, что

$$Y = Y_1 + Y_2 = Q_1 \Sigma_1 V_1^T + Q_2 \Sigma_2 V_2^T.$$

Тогда матрица Y_1 имеет неполный ранг, который можно рассматривать как размерность приближенной модели. Размерность матриц, задающих Y_1 , выберем так, чтобы аппроксимирующая модель по точности была согласована с погрешностью в данных. Для этого выделим сингулярное число по величине близкое к $\max_i \varepsilon_i$ и его местоположение на диагонали будет определять размерность Σ_1 и всех остальных блоков, соответственно. После этого вычисляем матрицу Y_2 и с учетом (7) проверяем выполнимость условия

$$(9) \quad |Y_2| = |Q_2 \Sigma_2 V_2^T| \leq E.$$

Если получим равенство, то размерность выбрана правильно. При строгом неравенстве уменьшаем на единицу размерность, вычисляем для нее Y_1 и Y_2 и проверяем (9). Если оно не выполняется, то выбранная перед этим размерность будет искомой. В случае невыполнения (9) увеличиваем на единицу размерность блока Σ_1 и вычисляем новые Y_1 , Y_2 с последующей проверкой (9). При его выполнении получаем желаемую

размерность. В противном случае итеративный процесс установления размерности аппроксимирующей модели продолжается до получения положительного результата.

После завершения этой процедуры можно найти аппроксимирующую модель, воспользовавшись для этого одним из существующих “subspace”-методов, которые размещены в Toolboxes Система идентификации для использования с MATLAB (см., например, [4]). При этом вместо Y следует использовать неполноранговую матрицу Y_1 с установленной размерностью искомой модели.

3.2. Квазиоптимальное решение на длительном интервале

В этом случае будем определять квазиоптимальное значение параметра регуляризации, которым является размерность модели. Ее значение соответствует предельной размерности, после которой задачу идентификации трактуем как некорректно поставленную. Для нахождения квазиоптимального решения имеющиеся данные разбиваем на два примерно равных интервала. На первом из них задаем размерность n_0 искомой модели и методом 4SID находим только матрицу A для некоторой реализации. Вычисляем ее собственные значения. Затем смещаем первый интервал на q шагов вправо и для новых данных вычисляем матрицу A и ее собственные значения тем же способом. После этого вновь смещаем интервал на q шагов и находим для него собственные значения. Продолжаем эту процедуру до того момента, когда смещаемый интервал практически совпадает со вторым интервалом данных исходного разбиения. Для полученного таким образом множества собственных значений проводим оценку их разброса. Если он оказался небольшим, то увеличиваем на единицу n_0 и проделываем те же самые действия по определению разброса собственных значений. Если же для начальной размерности разброс оказался большим, то уменьшаем размерность модели. Процесс установления порядка приближенной модели заканчивается после нахождения границы устойчивости.

Предельно допустимая условием устойчивости размерность дает квазиоптимальное ее значение. Для нее одним из 4SID методов вычисляются все параметры приближенной модели. Полученное решение задачи идентификации и будет регуляризирующим. Оно будет, во-первых, малочувствительным к шумам измерений, а, во-вторых, при стремлении погрешности к нулю, а числа данных измерений к ∞ , регуляризованное решение будет приближаться к точному описанию. Здесь следует заметить, что с определенной размерности в этом процессе основными станут погрешности вычислений.

Список литературы

1. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. М.: Физматгиз, Наука, 1979. 224 с.
2. Glover K., Curtain R.F., Partington J.R. Realization and Approximation of Linear Infinite-Dimensional Systems with Error Bounds // SIAM Jour. Control and Optimization. 1988. Vol. 26, No 4. P. 863-898.
3. Verhaegen M. Subspace model identification. Part 1: The output-error state space model identification class of algorithms // International Journal of Control. 1992. Vol. 56, No 5. P. 1187-1210.
4. Ljung L. System Identification Toolbox for use with MATLAB. Version 7. The MathWorks, Inc, Natick, MA, 7th edition, 2007.