УДК 681.51.011

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ НЕЛИНЕЙНЫХ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Б. Г. Ильясов
Уфимский государственный авиационный технический университет
Россия, 450008, Уфа, Карла Маркса ул., 12,
E-mail: ilyasov@tc.ugatu.ac.ru

Г. А. Саитова
Уфимский государственный авиационный технический университет
Россия, 450008, Уфа, Карла Маркса ул., 12,
E-mail: : saitova@bk.ru

Ключевые слова: многосвязная система, нелинейная система, устойчивость, частотный критерий, периодические движения.

Аннотация: Предложены метод оценки значений параметров периодических движений и частотный критерии их устойчивости для нелинейных однотипных многосвязных систем автоматического управления, позволяющие достаточно просто определять параметры периодических движений и их устойчивость в нелинейных многосвязных системах большой размерности. Результаты подтверждены с помощью математического моделирования.

1. Введение

В статье предлагаются методы исследования нелинейных многосвязных систем (НМС) с идентичными (однотипными) нелинейными подсистемами и числовыми коэффициентами связей между ними. Предполагаем, что все замкнутые контуры НМС удовлетворяют условию фильтра, что позволяет использовать метод гармонической линеаризации.

Запишем уравнение НМС в полиномиальной векторно-матричной форме [1-3]. относительно физически реализуемых координат $X(t)=\left\{x_i(t)\right\}$, где $i=\overline{1,n}$:

(1) $$M(p,a)X(t)=KX(t)+BU(t),$$

где K – матрица числовых коэффициентов связей между подсистемами, в диагонали которой стоят нулевые элементы, $M(p,a)$ – множество характеристических полиномов нелинейных подсистем, соответствующих данным физическим координатам, $B=diag\{b_1,b_2....,b_n\}$ – матрица коэффициентов входных сигналов; $U=[u_1,u_2,\ldots,u_n]^{\mathrm{T}}$ – вектор входных сигналов, p – оператор дифференцирования, a – амплитуда входного гармонического сигнала.

В основе исследования НМС лежат три класса задач [4, 5]:

1) анализ устойчивости состояния равновесия НМС,

2) определение параметров периодических движений (ПД) в НМС: амплитуды $(a_{п})$ и частоты $(\omega_{п})$,
3) оценка устойчивости периодического движения в НМС при вариации её параметров.

2. Оценки устойчивости состояния равновесия нелинейной многосвязной системы

Для оценки устойчивости динамического и статического состояния равновесия нелинейной МС запишем ее характеристическое уравнение в виде

(2) $$D(M(\lambda,a))=\det\left[M(\lambda,a)I-K\right]=0,$$

где I – единичная матрица, λ – комплексная переменная. При этом для устойчивости системы уравнений (1) необходимо достаточно (по А.М. Ляпунову), чтобы вещественные части корней λ_i, $i=\overline{1,n}$, уравнения (2) были строго отрицательными.

Раскрыв определитель (2), получим относительно переменной M алгебраическое уравнение степени, равной порядку матрицы, т.е. количеству физических переменных x_i:

(3) $$D(M,a)=M(\lambda,a)^n+h_2M(\lambda,a)^{n-2}+h_3M(\lambda,a)^{n-3}+\ldots+h_n=0\ ,$$

$$h_2=\sum_{\substack{i=1,j=1\\ i\neq j}}^{n}k_{ij}k_{ji}\,,\ h_3=\sum_{\substack{i=j=m=1\\ i\neq j\neq m}}^{n}k_{ij}k_{jm}k_{mi}\,,\ h_n=(-1)^n\det K\,.$$

Здесь числовые коэффициенты h_i отражают связи между: h_2 – парами подсистем, h_3 – тройками подсистем, h_n – всеми подсистемами, что соответствует вычислению определителя K. По характеристическому уравнению (3) будем изучать статическую устойчивость состояния равновесия нелинейной многосвязной системы (1), которое соответствует условию положительности свободного члена характеристического уравнения (2) нелинейной многосвязной системы. Полагая, что $M(0,a)=1$, получим условие статической устойчивости положения равновесия нелинейной многосвязной системы:

(4) $$D(0)=1+h_2+h_3+\ldots+h_n>0\,.$$

Введем понятие критической точки, под которой будем понимать значение корня характеристического уравнения МС, лежащей на ее мнимой оси.

Если в уравнении (4) вместо M поставить комплексную переменную z, то получим уравнение критических точек, значения которых вычисляются по формуле (4):

(5) $$z^n+h_2z^{n-2}+h_3z^{n-3}+\ldots+h_n=0\,.$$

Отметим, что корни z_k уравнения (5) лежат на мнимой оси корней характеристического уравнения нелинейной многосвязной системы (2), а потому будут служить критическими точками для характеристического уравнения отдельной подсистемы.

Тогда для нелинейных систем остается справедливым по содержанию критерий устойчивости положения равновесия линейных МС, предложенный в работе [10]:

Критерий устойчивости I.

Для устойчивости динамического состояния равновесия однотипной нелинейной многосвязной системы (1) необходимо и достаточно, чтобы при изменении ω от 0 до ±∞ годограф Михайлова M(jω,a) (характеристический полином нелинейной автономной подсистемы) при варьировании амплитуды a входного сигнала в некотором диапазоне, охватывал все критические точки уравнения (5) и не пересекает их (рис. 2).

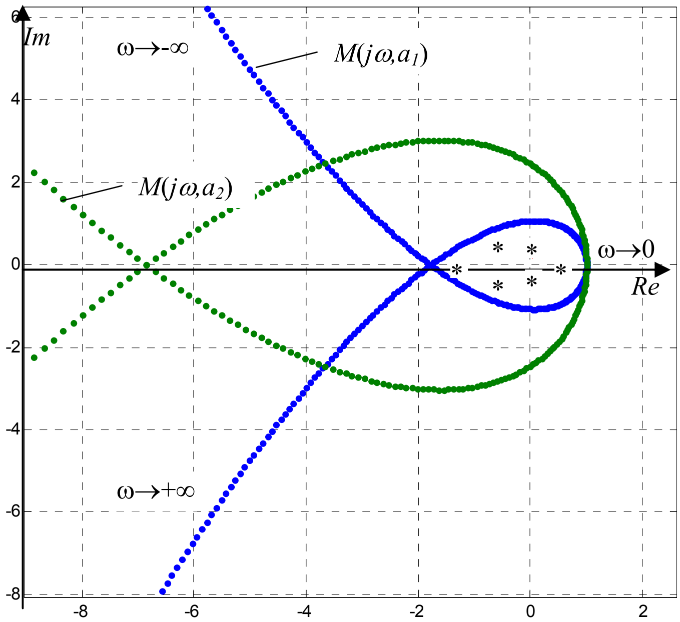

Рис. 1. Показана деформация кривой Михайлова, соответствующая характеристическому полиному нелинейной подсистемы при вариации амплитуды *a* входного гармонического сигнала.

На рис. 2 для устойчивой однотипной шестисвязной нелинейной системы показана деформация кривой Михайлова, соответствующая характеристическому полиному нелинейной подсистемы при вариации амплитуды *a* входного гармонического сигнала

Условием наличия в НМС периодических движений является прохождение кривой Михайлова $M(j\omega,a)$ через один из множества $\{z_i\}$ корней уравнения критических точек, то есть нелинейная МС будет находиться на колебательной границе устойчивости.

Пусть в общем случае критической точкой будет корень уравнения (5) вида $z^*_i=\alpha_i+j\beta_i$, через которую проходит кривая Михайлова. Тогда справедливо равенство:

(6) $$D(a,j\omega)=M(j\omega_п,a_п)^n+h_2M(j\omega_п,a_п)^{n-2}+h_3M(j\omega_п,a_п)^{n-3}+\ldots+h_n=z^*_i.$$

Используя частотную форму записи можно уравнение (6) представить в виде:

(7) $$D(a,j\omega)=U(\omega_п,a_п)+jV(\omega_п,a_п)=\alpha_i+j\beta_i.$$

Отсюда получим систему из двух уравнений:

(8) $$\left.\begin{array}{l} U(\omega_п,a_п)=\alpha_i \\ V(\omega_п,a_п)=\beta_i \end{array}\right\}.$$

Решая систему уравнений (8), найдем искомые параметры периодических движений $\omega_п, a_п$ нелинейной МС.

При этом искомое значение амплитуды $a_п$ периодические движения (ПД) соответствует той кривой Михайлова $M(a_п,j\omega_п)$, которая пересечет критическую точку z^*_i.. Искомый параметр $\omega_п$ ПД равен частоте критической точки z_i, т.е. $\omega_п=\omega_i=\beta_i$.

Определим направление деформации кривой Михайлова $M(a,j\omega)$ при увеличении амплитуды a. Вектор $R(a)$ и будет определять направление роста амплитуды a .

Пользуясь вышеизложенным критерием устойчивости, проследим, какой станет система (устойчивой или неустойчивой) при движении по вектору $R(a)$ от критической точки.

Отсюда можно сформулировать критерии устойчивости ПД в нелинейной МС (рис. 2)

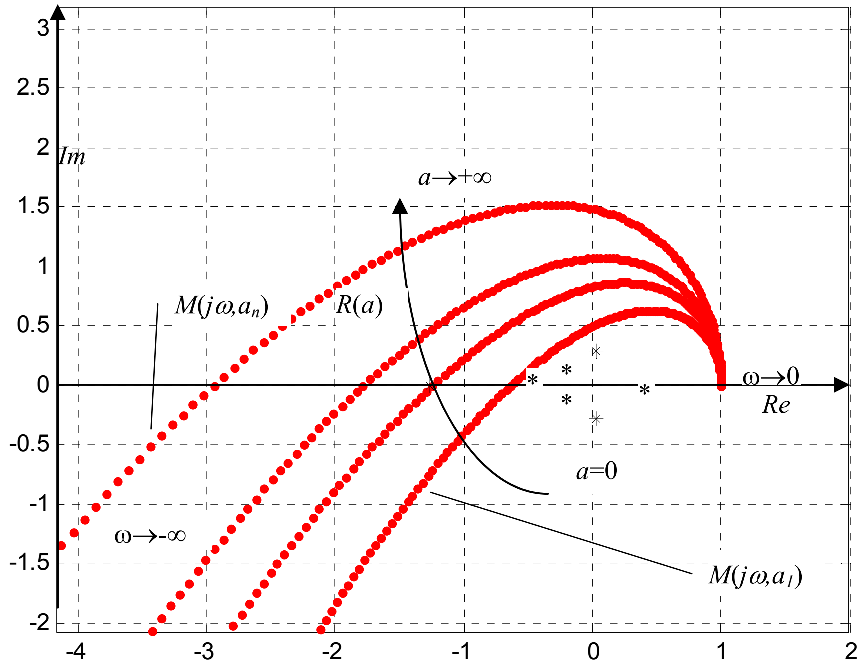

Рис. 2. Рисунок соответствует устойчивым ПД в нелинейной МСУ

<u>Критерии устойчивости периодических движений II</u>. При пересечении кривой Михайлова подсистемы с критической точкой уравнения связей, полученные периодические движения в однотипной нелинейной многосвязной системе будут устойчивыми, если при движении по $R(a)$ в сторону увеличения амплитуды a кривая Михайлова будет соответствовать устойчивой системе, а при уменьшении амплитуды – неустойчивой системе, то ПД в данной критической точки будут устойчивыми.

Если же картина будет обратной, то ПД в критической точки будут неустойчивыми.

3. Заключение

1. Предложен критерий устойчивости положения равновесия для однотипной нелинейной МС на основе поведения кривой Михайлова нелинейных подсистем относительно критических точек.

2. Предложен метод оценки параметров периодических движений однотипной нелинейной МС на основе начальной информации о характеристическом полиноме нелинейной подсистемы (кривой Михайлова) и числовых значениях корней уравнения связи между подсистемами

3. Предложен критерий устойчивости периодических движений однотипных нелинейных МС на основе деформации кривой Михайлова при вариации амплитуды входного сигнала

4. Предложный подход к исследованию нелинейных МС развивает дальше подход, известный в классической теории систем автоматического управления.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 18-08-00702 А, 18-08-01299 А)

Список литературы

1. Ильясов Б.Г., Саитова Г.А. Анализ устойчивости динамических систем, представленных в полиномиальной векторно-матричной форме // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2018, № 2. С. 3-10.
2. Ильясов Б.Г., Саитова Г.А. Системный подход к исследованию многосвязных систем автоматического управления на основе частотных методов // Автоматика и телемеханика. 2013. № 3. С. 173-191.
3. Ильясов Б.Г., Саитова Г.А., Халикова Е.А. Анализ запасов устойчивости гомогенных многосвязных систем управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 4. С. 4-12.
4. Ильясов Б.Г., Саитова Г.А., Денисова Е.В.Анализ периодических движений в нелинейных однотипных многосвязных системах автоматического управления (МСАУ) // Мехатроника. 2001. № 7. С. 29-34.
5. Ильясов Б.Г., Мунасыпов Р.А., Саитова Г.А. и др. Анализ периодических движений в многосвязных системах с нечеткими регуляторами в сепаратных подсистемах // Мехатроника, автоматизация, управление. 2004. № 8. С. 24-29.