

# НЕЛИНЕЙНЫЙ АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕВЕРНУТЫМ МАЯТНИКОМ

С.А. Кочетков

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: [kos@ipu.ru](mailto:kos@ipu.ru)

**Ключевые слова:** перевернутый маятник, сухое трение, неустойчивая нулевая динамика, релейные системы.

**Аннотация:** В работе рассматривается задача управления перевернутым маятником, закрепленным на подвижной тележке, которая с помощью электродвигателя может быть перемещена по направляющему рельсу. Между тележкой и рельсом существует сила сухого трения, которая может регулироваться пружинами, входящими в состав конструкции тележки. Ставится задача стабилизации маятника в верхнем положении при одновременном задании положения тележки на направляющем рельсе. Для компенсации существенного нелинейного возмущения в виде силы сухого трения в статье разработан новый релейный закон управления, с помощью которого удастся обеспечить решение поставленной проблемы с заданной точностью.

## 1. Введение

В статье рассматривается перевернутый маятник, закрепленный на подвижном основании (см. рис. 1). В качестве исполнительного устройства, приводящего в движение тележку используется двигатель постоянного тока с возбуждением от постоянных магнитов. Сила сухого трения между подвижной тележкой, перемещающейся по рельсе, может регулироваться за счет поджатия роликов, входящих в состав крепления. Подобная конструкция широко применяется в технике для компенсации люфтов подвижных механизмов. Наличие существенного возмущения не позволяет использовать при синтезе законов стабилизации верхнего положения маятника классические линейные алгоритмы на основе ПИД-регуляторов, т.к. при достаточно малых отклонениях управляющее воздействие подавляется нелинейной силой трения. Использование наблюдателей возмущений затруднено в силу достаточно малых скоростей движений, что делает задачу оценивания возмущения плохо обусловленной. В статье предложен закон управления, позволяющий избежать указанных трудностей.

Для дальнейшего изложения введем обозначения, приведенные в таблице 1. Математическая модель электромеханической системы может быть записана с исполь-

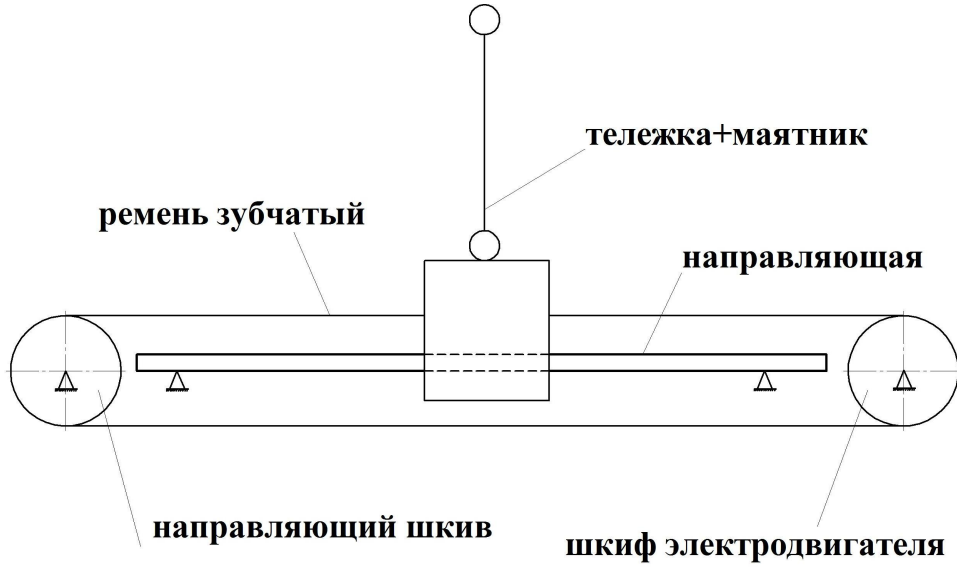


Рис. 1. Конструкция стенда.

зованием уравнений Кирхгофа и уравнений Лагранжа второго рода [1, 2]

$$\begin{aligned}
 \dot{\varphi} &= \omega, \\
 \dot{\bar{x}} &= v, \\
 \dot{\omega} &= \frac{M_{\text{eq}} [-\mu_p \omega + mgl \sin(\varphi)]}{\Delta(\varphi)} + \\
 &\quad + \frac{ml \cos(\varphi) \left[ -ml \sin(\varphi) \omega^2 - \mu_{bd} N \text{sign}(v) - \mu_{\text{beq}} v + \frac{c_i}{r_s} I \right]}{\Delta(\varphi)}, \\
 \dot{v} &= \frac{ml \cos(\varphi) [-\mu_p \omega + mgl \sin(\varphi)]}{\Delta(\varphi)} + \\
 &\quad + \frac{J_{\text{eq}} \left[ -ml \sin(\varphi) \omega^2 - \mu_{bd} N \text{sign}(v) - \mu_{\text{beq}} v + \frac{c_i}{r_s} I \right]}{\Delta(\varphi)}, \\
 \dot{I} &= -\frac{R}{L} I - \frac{c_\omega}{L r_s} v + \frac{u}{L},
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где основные переменные и параметры приведены в таблице 1,  $\mu_{\text{beq}} = \mu_{bv} + \frac{\mu_d}{r_s^2}$ ,

$M_{\text{eq}} = m + M + \frac{J_d \eta_g k_g^2}{r_s^2}$ ,  $J_{\text{eq}} = J + ml^2$ ,  $\Delta(\varphi) = M_{\text{eq}} J_{\text{eq}} - m^2 l^2 \cos^2(\varphi)$ ,  $\text{sign}(\cdot)$  – функция знака.

В работе одновременно ставится задача стабилизации маятника в верхнем положении  $\varphi = 0$  и задача регулирования положения подвижного основания в заданном положении

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}| \leq \delta_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi| \leq \delta_2,
 \tag{2}$$

где  $\bar{x} = x - x_{\text{ref}}$ ,  $x_{\text{ref}} = \text{const}$  – заданное положение стабилизации подвижного тела,  $\delta_1, \delta_2 = \text{const} > 0$  – заданные константы.

| Переменная/<br>Параметр  | Описание  |
|--|---|
| $\varphi$ , [рад]  | угловое отклонение маятника от вертикального положения          |
| $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ , [рад/с]                                       | угловая скорость маятника                                       |
| $J$ , [кг·м <sup>2</sup> ]   | момент инерции маятника   |
| $l$ , [м]  | расстояние до центра масс маятника                              |
| $m$ , [кг]   | масса маятника  |
| $M$ , [кг]   | масса подвижного основания                                      |
| $x$ , [м]  | координата центра масс подвижного основания                     |
| $v$ , [м/с]  | скорость центра масс подвижного основания                       |
| $\mu_{bd}$   | коэффициент сухого трения между подвижным основанием и рельсом  |
| $\mu_{bv}$ , $\left[\frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}}\right]$             | коэффициент вязкого трения между подвижным основанием и рельсом |
| $\mu_p$ , $\left[\frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}}{\text{рад}}\right]$ | коэффициент вязкого трения в подшипнике маятника                |
| $\mu_d$ , $\left[\frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}}{\text{рад}}\right]$ | коэффициент вязкого трения в подшипнике электродвигателя        |
| $R$ , [Ом]   | сопротивление якоря электродвигателя                            |
| $L$ , [Гн]   | индуктивность якоря электродвигателя                            |
| $c_i$ , $\left[\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{А}}\right]$                  | постоянная момента электродвигателя                             |
| $c_\omega$ , $\left[\frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{рад}}\right]$           | коэффициент противо-ЭДС электродвигателя                        |
| $k_g$  | передаточное число редуктора                                    |
| $\eta_g$   | КПД редуктора   |
| $J_d$ , [кг·м <sup>2</sup> ]   | момент инерции электродвигателя со шкивом                       |
| $r_s$ , [м]  | радиус шкива на на выходном валу редуктора                      |
| $\varphi_d$ , [рад]  | угловое положение вала электродвигателя                         |
| $\omega_d$ , [рад/с]   | угловая скорость вала электродвигателя                          |
| $I$ , [А]  | сила тока в обмотке якоря электродвигателя                      |
| $u$ , [В]  | напряжение на обмотке якоря электродвигателя                    |
| $N$ , [Н·м]  | сила реакции опоры тележки                                      |

Таблица 1. Переменные и параметры маятника на подвижном основании.

## 2. Синтез нелинейного закона управления

Рассмотрим синтез нелинейного закона управления на основе пошаговой процедуры преобразования исходной системы к блочной канонической форме управляемости. Рассматривая механическую подсистему системы (1) с учетом (2) и используя процедуру линеаризации, получим

$$(3) \quad \dot{y} = Ay + BI + Q\xi,$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{mglM_{\text{eq}}}{\Delta} & 0 & -\frac{\mu_p M_{\text{eq}}}{\Delta} & -\frac{\mu_{\text{beq}} ml}{\Delta} \\ \frac{m^2 l^2 g}{\Delta} & 0 & -\frac{\mu_p ml}{\Delta} & -\frac{J_{\text{eq}} \mu_{\text{beq}}}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{mlc_i}{\Delta r_s} \\ \frac{J_{\text{eq}} c_i}{\Delta r_s} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{ml}{\Delta} \\ \frac{J_{\text{eq}}}{\Delta} \end{pmatrix},$$

$$y = (\varphi \quad \bar{x} \quad \omega \quad v)^T, \quad \xi = -\mu_{bd} N \text{sign}(v).$$

*Шаг 1.* Обозначим матрицу преобразования системы (3) в каноническую форму управляемости относительно фиктивного управления через  $T_c$ , тогда матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $Q$  и вектор состояния  $y$  в канонической форме управляемости запишутся в виде

$$(4) \quad A_c = T_c A T_c^{-1}, \quad B_c = T_c B, \quad Q_c = T_c Q, \quad y^* = T_c y.$$

Введем также в рассмотрение матрицу преобразования  $T_b$  из канонической формы (4) в блочную форму вида

$$A_b = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 1 \\ x & x & x & x \end{pmatrix}, \quad B_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 1 & 0 & 0 \\ k_1^2 & -(k_1+k_2) & 1 & 0 \\ -k_1^3 & k_2(k_1+k_2)+k_1^2 & -(k_1+k_2+k_3) & 1 \end{pmatrix},$$

где через  $x$  обозначены ненулевые элементы, которые могут быть вычислены с помощью матриц подсистемы (3) на основе хорошо известных процедур [3].

С учетом введенных обозначений

$$(5) \quad A_b = T_b^{-1} T_c A T_c^{-1} T_b, \quad B_b = (0 \ 0 \ 0 \ 1), \quad \tilde{y} = T_b^{-1} y^*.$$

*Шаг 2.* При выборе фиктивного управления, в качестве которого выступает момент электродвигателя  $I$  таким образом, что последняя компонента вектора  $\tilde{y}$  сходится в заданную окрестность нуля, обеспечивается стабилизация всего вектора  $\tilde{y}$ , а значит и исходных переменных механической подсистемы (вектор  $y$ ). Для синтеза фиктивного  $I$  и реального управления на втором шаге введем замену переменных

$$(6) \quad s = \frac{c_i}{r_s} I - \tilde{I} + (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T A_b \tilde{y}, \quad \dot{\tilde{I}} = -\alpha \tilde{I} - V \text{sign}(\tilde{y}_4), \quad \tilde{y}_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T T_b^{-1} T_c \tilde{y},$$

чтобы привести замкнутую электромеханическую систему к виду

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{y}}_1 &= -k_1 \tilde{x}_1 + \tilde{y}_2, \\ \dot{\tilde{y}}_2 &= -k_2 \tilde{x}_2 + \tilde{y}_3, \\ \dot{\tilde{y}}_3 &= -k_3 \tilde{x}_3 + \tilde{y}_4, \\ \dot{\tilde{y}}_4 &= \tilde{I} + s + \xi(t), \\ \dot{\tilde{I}} &= -\alpha \tilde{I} - V \text{sign}(\tilde{y}_4), \\ \dot{s} &= \frac{c_i}{r_s} \left( -\frac{R}{L} I - \frac{c_\omega}{L r_s} v + \frac{u}{L} \right) - \alpha \tilde{I} - V \text{sign}([0 \ 0 \ 0 \ 1]^T T_b^{-1} T_c \tilde{y}), \\ u &= -U \text{sign}(s). \end{aligned}$$

При определенных начальных условиях и достаточной амплитуде разрывного управления  $U$

$$U > \frac{L r_s}{c_i} \left| \frac{c_i}{r_s} \left( -\frac{R}{L} I - \frac{c_\omega}{L r_s} v \right) - \alpha \tilde{I} - V \text{sign}([0 \ 0 \ 0 \ 1]^T T_b^{-1} T_c \tilde{y}) \right|$$

в замкнутой системе (7) за конечное время возникает скользящий режим, движение в котором описывается редуцированными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}}_1 &= -k_1 \tilde{x}_1 + \tilde{y}_2, \\ \dot{\tilde{y}}_2 &= -k_2 \tilde{x}_2 + \tilde{y}_3, \\ \dot{\tilde{y}}_3 &= -k_3 \tilde{x}_3 + \tilde{y}_4, \\ \dot{\tilde{y}}_4 &= \tilde{I} + \xi(t), \\ \dot{\tilde{I}} &= -\alpha \tilde{I} - V \text{sign}(\tilde{y}_4). \end{aligned}$$

Можно показать [4], что при определенном выборе параметров  $\alpha$ ,  $V$  внутреннего контроллера (6), обеспечивается решение поставленной задачи (2) с заданной точностью.

### 3. Заключение

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-01-00846А).

### Список литературы

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ, 1961.
2. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. Том 1. СПб.: Питер, 2004.
3. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. СПб.: Наука, 2000.
4. Kochetkov S.A., Utkin V.A. Invariance in systems with unmatched perturbations // Automation and Remote Control. 2013. Vol. 74, No. 7. P. 1097-1127.