УДК 517.977.56

РЕЖИМЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОВОРОТОМ ТВЕРДОГО ТЕЛА С УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ

Кубышкин Е.П.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Россия, 150000, Ярославль, Советская ул., 14

E-mail: kubysh.e@yandex.ru

Ключевые слова: твердое тело с упругим стержнем, оптимальное управление, проблема моментов, режимы управления со счетным числом переключений.

Аннотация: Рассматривается задача оптимального поворота механической системы, состоящей из твердого тела с упругим прямолинейным стержнем постоянного сечения, жестко прикрепленным одним концом к твердому телу. Поворот осуществляется моментом внешних сил, приложенным к оси, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно средней линии недеформированного стержня. Рассмотрены две задачи оптимального управления – задача перевода механической системы из начального фазового состояния в конечное в заданный момент времени с минимизацией величины управляющего момента (нормы управляющего момента в пространстве L_∞) и задача быстродействия при ограничении величины управляющего момента. Показано, что оптимальные управления, дающие решения сформулированных задач, могут иметь счетное число переключений (разрывов первого рода).Такие режимы управления являются достаточно типичными для рассматриваемой задачи.

1. Постановка задачи и описание результата

Рассматривается начально-краевая задача

$$J\ddot{\theta} + \int_0^1 (x+a) y_{tt}(x,t)dx = M(t), \tag{1}$$

$$y_{tt} + y_{xxxx} = -(x+a)\ddot{\theta}, \tag{2}$$

$$y(0,t) = y_x(0,t) = 0, y_{xx}(1,t) = y_{xxx}(1,t) = 0, \tag{3}$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \quad y(x,0) = y_0(x), \quad y_t(x,0) = \dot{y}_0(x), \tag{4}$$

для определения функций $\theta(t), y(x,t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x \leqslant 1)$, в которой $J = J_0 + a^2 + a + 1/3$, где J_0, a — положительные параметры, $\theta_0, \dot{\theta}_0, M(t), y_0(x), \dot{y}_0(x)$ — заданные постоянные и функции.

Начально-краевая задача (1)–(4) описывает поворот механической системы, состоящей из твердого тела с прямолинейным упругим стержнем, который одним концом жестко прикреплен к твердому телу. Упругий стержень моделируется балкой

Эйлера-Бернулли в рамках гипотез малого изгиба, имеет постоянное сечение и равномерно распределенную по длине массу. Точка заделки стержня в твердое тело и его центр масс находятся на одной прямой со средней линией недеформированного стержня. Поворот осуществляется вокруг оси, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно средней линии недеформированного стержня моментом внешних сил, приложенным к оси вращения и определяемым функцией $M(t)$. Положение механической системы характеризуется двумя функциями $\theta(t)$ и $y(x,t)$, определяющими соответственно угол поворота системы относительно инерциального пространства и поперечную деформацию стержня в точке на оси, проходящей вдоль средней линии недеформированного стержня от его точки заделки в твердом теле. Вывод уравнений движения рассматриваемой механической системы, имеется, например, в [1], где рассмотрена более сложная система, а рассматриваемая является ее частным случаем. Начально-краевая задача приведена в безразмерных переменных.

В дальнейшем, как обычно, $L_1(0,T)$ и $L_2(0,T)$ — пространства определенных на $[0,T]$ вещественнозначных интегрируемых по Лебегу функций $u(t)$, для которых соответственно $\|u(t)\|_{L_1(0,T)} = \int_0^T |u(t)|dt < \infty$ и $\|u(t)\|_{L_2(0,T)} = (u(t),u(t))^{1/2}_{L_2(0,T)} < \infty$, где $(u_1(t),u_2(t))_{L_2(0,T)} = \int_0^T u_1(t)u_2(t)dt$, $L_\infty(0,T)$ — подпространство функций из $L_1(0,T)$, для которых $\|u(t)\|_{L_\infty(0,T)} = vrai\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|u(t)| < \infty$ (существенный supremum).

Для начально-краевой задачи (1)–(4) рассматриваются следующие задачи оптимального управления.

Задача 1. *Определить функцию управления $M(t)\in L_\infty(0,T)$, переводящую решение начально-краевой задачи (1)–(4) из начального состояния (4) в конечное*

$$\theta(T)=\theta_T,\quad \dot\theta(T)=\dot\theta_T,\quad y(x,T)=y_T(x),\quad y_t(x,T)=\dot y_T(x) \tag{5}$$

в заданный момент времени T и минимизирующую функционал

$$\Phi(M)=\|M(t)\|_{L_\infty(0,T)}.$$

Задача 2 (Задача быстродействия)**.** *Определить функцию управления $M(t)\in L_\infty(0,T)$, $\Phi(M)\leqslant L<\infty$, переводящую решение начально-краевой задачи (1)–(4) из (4) в (5) за минимальное время T.*

В работах [1]– [3] предложена методика, позволяющая свести решение задач 1,2 к решению проблемы моментов в пространстве $L_1(0,T)$. Решение проблемы моментов определяется на основе принципа максимума для множества линейных непрерывных функционалов в $L_1(0,T)$, имеющих некоторую фиксированную норму, на экстремальном элементе и дается функций, принимающей лишь два одинаковых по модулю значения. Экстремальный элемент эффективно строится по начальным и конечным условиям (4)–(5) и параметрам уравнений (1)–(2). При этом минимальное значение T в решениии задачи 2 определяется как первый положительный корень некоторого нелинейного уравнения. Это позволило указать такие начальные и конечные условия (4) при которых искомые функции $M(t)$, определяющие решения задач 1,2 (оптимальные управления), содержат счетное число точек разрыва первого рода (счетное число переключений). Такие режимы управления являются достаточно типичными для рассматриваемой задачи. Отметим, что предложенный подход принципиально отличается от идеологии работы [4], где также рассматривались управления с бесконечным числом переключений.

2. Схема построения оптимальных управлений

Спектральная краевая задача

$$v^{\mathrm{IV}}(x) - J_0^{-1}(x+a)(av'''(0) - v''(0)) = \lambda v(x),$$
$$v(0) = v'(0) = 0, v''(1) = v'''(1) = 0$$

имеет последовательность однократных положительных собственных значений $\lambda_k = \beta_k^4,\ k = 1, 2, ...,$ где β_k – $k-$й положительный корень уравнения

$$\operatorname{ch}(\beta)\cos(\beta) + 1 + J_0^{-1}\{2a\beta^{-2}\operatorname{sh}(\beta)\sin(\beta) +$$
$$+\beta^{-3}[(a^2\beta^2+1)\operatorname{ch}(\beta)\sin(\beta) + (a^2\beta^2-1)\operatorname{sh}(\beta)\cos(\beta)]\} = 0,$$

($\beta_n \sim \pi/2(2n-1)$ при $n \to \infty$), и соответствующих собственных функций $v_k(x)$, удовлетворяющих следующему условию биортогональности

$$\langle v_k(x), v_m(x)\rangle = \delta_{km},\ \langle v, w\rangle = (v, w)_{L_2(0,1)} - J^{-1}(x+a, v)_{L_2(0,1)}(x+a, w)_{L_2(0,1)},$$

где δ_{km} – символ Кронекера.

Обозначим через $H_j(0,1)$ $(j = 1, 2, 3)$ обозначим пространства функций вида

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n(x),\ u_n = \langle u(x), v_n(x)\rangle,\ \|u(x)\|_{H_j(0,1)} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^j u_n^2\Big)^{1/2} < \infty,$$

$\omega_n = \beta_n^2$. Отметим, что эти пространства являются соответственно замкнутыми подпространствами пространств $W_2^j(0,1)$.

Предполагаем, что

$$y_0(x), y_T(x) \in H_3(0,1), \quad \dot{y}_0(x), \dot{y}_T(x) \in H_1(0,1).$$

Положим

$$a_{0n} = \omega_n\langle y_0(x), v_n(x)\rangle, \quad b_{0n} = \langle \dot{y}_0(x), v_n(x)\rangle,$$
$$a_{Tn} = \omega_n\langle y_T(x), v_n(x)\rangle, \quad b_{Tn} = \langle \dot{y}_T(x), v_n(x)\rangle \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Теорема 1. *(Необходимое условие управляемости поведением решений начально-краевой задачи (1)–(4).)*

$$d_n = \langle x+a, v_n(x)\rangle \neq 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad d_n = O(n^{-1}) \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Введем в рассмотрение величины

$$\alpha_1(T) = J(\dot\theta_T - \dot\theta_0) + JJ_0^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} d_n(b_{Tn} - b_{0n}),$$

(6) $$\alpha_2(T) = J(\theta_T - \theta_0 - \dot\theta_0 T) + JJ_0^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} d_n(-a_{0n}\omega_n^{-1} + a_{Tn} - b_{0n}T),$$

$$\alpha_{2n+1}(T) = J_0 d_n^{-1}(a_{0n}\cos(\omega_n T) + b_{0n}\sin(\omega_n T) - a_{Tn}),$$
$$\alpha_{2n+2}(T) = J_0 d_n^{-1}(-a_{0n}\sin(\omega_n T) + b_{0n}\cos(\omega_n T) - b_{Tn}),$$

$n = 1, 2, \dots,\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2(T) < \infty$ и линейный непрерывный функционал в $L_1(0,T)$

(7) $$F_1(u) = \int_0^T u(t)M(t)dt, \quad M(t) \in L_\infty(0,T), \quad \|F_1\| = \|M(t)\|_{L_\infty}.$$

Обозначим

(8) $$\varphi_1(t) = 1, \varphi_2(t) = T - t, \varphi_{2n+1}(t) = \sin(\omega_n(T-t)), \varphi_{2n+2}(t) = \cos(\omega_n(T-t)),$$

$n = 1, 2, \dots$. Задача 1 может быть сформулирована как следующая проблема моментов в $L_1(0,T)$.

Задача. *Найти функционал вида (7), удовлетворяющий условиям*

$$F_1(\varphi_j(t)) = \alpha_j(T) \ (j = 1, 2, \dots)$$

и имеющий минимальную норму $\|F_1\|_{min} = m_1(T)$.

Обозначим через $Q_2(0,T)$ подпространство $L_2(0,T)$, являющееся замкнутой в норме этого пространства линейной оболочкой функций (8).

Теорема 2. *Функции (8) образуют базис Рисса в* $Q_2(0,T)$.

Обозначим через $Q_1(0,T)$ подпространство $L_1(0,T)$, полученное замыканием в норме пространства $L_1(0,T)$ множества функций вида $u_N(t) = \sum_{j=1}^{N} \xi_j \varphi_j(t), \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2, \|\xi\|_{l_2} = (\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2)^{1/2} < \infty$. В силу соотношения $\|u_N(t)\|_{L_1(0,T)} \leqslant T^{1/2}\|u_N(t)\|_{L_2(0,T)}$ $Q_1(0,T)$ является замкнутым линейным подпространством $L_1(0,T)$.

По системе функций $\varphi_j(t)$ построим ортонормированную в $L_2(0,T)$ систему функций $\psi_j(t)$, используя процедуру ортогонализации Шмидта. Эта процедура определяет бесконечномерную нижнюю треугольную матрицу $B(T) = \{B_{ij}(T)\}_{i,j=1\dots\infty},\ \psi(t) = B(T)\varphi(t),\ \psi(t) = col(\psi_1(t), \psi_2(t), \dots), \varphi(t) = col(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots)$, которая задает ограниченный и ограниченно обратимый в пространстве l_2 оператор. Положим $\beta(T) = B(T)\alpha(T),\ \beta(T) = col(\beta_1(T), \beta_2(T), \dots), \alpha(T) = col(\alpha_1(T), \alpha_2(T), \dots)$. При этом

$$m_2(T) = (\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2(T))^{1/2} < \infty,\ \lim_{T\to 0} m_2(T) = \infty,\ \lim_{T\to\infty} m_2(T) = 0.$$

Теорема 3. *Функция*

$$M^{**}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(T)\psi_n(t), \|M^{**}(t)\|_{L_2(0,T)} = m_{2T}$$

определяет линейный непрерывный функционал $F_2(u) = (u(t), M^{**}(t))_{L_2(0,T)}$ *в пространстве* $L_2(0,T)$, *удовлетворяющий условию*

$$F_2(\varphi_j(t)) = \alpha_j(T) \ (j = 1, 2, \dots)$$

и имеющий минимальную норму $\|F_2\|_{min} = m_2(T)$

Отметим, что $Q_2(0,T) \subset Q_1(0,T)$. Функция

$$v^*(t) = M^{**}(t)/m_2^2(T).$$

удовлетворяет условию

$$F_1(v^*(t)) = F_1(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(T)\psi_j(t))/m_2^2(T) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^2(T)/m_2^2(T) = 1.$$

Таким образом, $e_0(t) = v^*(t)/l_1(T)$, $(l_1(T) = \|v^*(t)\|_{L_1(0,T)}, \|e_0(t)\|_{L_1(0,T)} = 1)$ является экстремальным элементом для функционала $F_1(u):\ F(e_0(t)) = l_1^{-1}(T)\|e_0(t)\|_{L_1(0,T)})$. Следовательно,

Теорема 4. *Решение задачи 1 дает функция*

$$M^*(t) = l_1^{-1}(T) sign(e_0(t)). \tag{9}$$

При этом $m_1(T) = l_1^{-1}(T)$ *и* $\lim_{T\to 0} m_1(T) = \infty$, $\lim_{T\to\infty} m_1(T) = 0$.

Обозначим через T^* первый положительный корень уравнения $l(T) = L$.

Теорема 5. *Решение задачи 2 дает пара* $(T^*, M^*(t))$, *где* $M^*(t)$ *определяется формулой* (9), *в которой* $T = T^*$.

Введем последовательность целых чисел $n_j = (3^{j-1} + 1)/2, j = 1, 2, \dots$ и непрерывную на отрезке $[0, T]$ функцию

$$v^*(t) = \sum_{j=1}^{\infty} (-q)^{j-1} \varphi_{2n_j+1}(t)\ (0 < q < 1).$$

Выберем для определенности $q = 0.9$. Функция $v^*(0) = 0$. В чередующихся точках $t_k^+ = T - 8/(\pi 9^{2k-1})$ и $t_k^- = T - 8/(\pi 9^{2k})$, $k = 1, 2, \dots$ имеем $v^*(t_k^+) > 0$, а $v^*(t_k^-) < 0$, т.е. при $t \to T$ значения функции $v^*(t)$ счетное число раз меняют знак. Введем последовательность $p(T) = col(p_1(T), p_2(T), \dots)$ $(p(T) \in l_2)$, положив $p_{2n_j+1}(T) = (-q)^{j-1}$, а остальные $p_k(T) = 0$. Имеем

$$v^*(t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j(T)\varphi_j(t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j(T) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_{jk}(T)\psi_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{b}_{jk}(T) p_j(T)\psi_k(t),$$

где через $\tilde{b}_{jk}(T)$ обозначены элементы бесконечномерной матрицы $B^{-1}(T)$.

Отсюда имеем $\beta(T) = (B^{-1})^* p(T)$ (знак $*$ обозначает транспонирование матрицы), и $\alpha(T) = B^{-1}\beta(T)$. По вектору $\alpha(T)$ согласно (6) выбираются $\theta_0, \dot{\theta}_0$ и $a_{0n}, b_{0n}, a_{Tn}, b_{Tn}$, определяющие начальные $y_0(x), \dot{y}_0(x)$ и конечные $y_T(x), \dot{y}_T(x)$ функции в (4)и (5) соответственно. В частности, если конечные условия нулевые, то начальные условия определяются однозначно. При этом значения функции $e_0(t) = v^*(t)/l_1(T)$ $(l_1(T) = \|v^*(t)\|_{L_1(0,T)})$ при $t \to T$ счетное число раз меняют знак, а функция (9), являющаяся решением задачи 1, имеет счетное число разрывов первого рода. Функция $v^*(t)$ может быть выбрана и другими способами.

Список литературы

1. Кубышкин Е.П. Оптимальное управление поворотом системы двух тел, соединенных упругим стержнем // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78, № 5. С.656-670.
2. Кубышкин Е.П. Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем // Прикладная математика и механика. 1992. Т. 56, № 1. С. 240-249.
3. Kubyshkin E.P., Tryakhov M.S. Optimal control of the behavior of solutions of an initial boundary value problem simulating rotation of a solid with an elastic rod // Automatic Control and Computer Sciences. 2015. Vol. 49, No. 7. P. 597-607.
4. Зеликин М.И., Манита Л.А. Накопление переключений управления в задачах с распределенными параметрами // Оптимальное управление. 2006. СМФН. Т. 19. С. 78-113.