

УДК 62-50

# УПРАВЛЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИМ РОБОТОМ С МАЯТНИКОВЫМ ПРИВОДОМ НОВОГО ТИПА

**Д.В. Баландин**

*Нижегородский государственный университет им Н.И. Лобачевского*

Россия, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

E-mail: [dbalandin@yandex.ru](mailto:dbalandin@yandex.ru)

**Р.С. Бирюков**

*Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет*

Россия, 603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, д. 65

E-mail: [biryukovrs@gmail.com](mailto:biryukovrs@gmail.com)

**М.М. Коган**

*Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет*

Россия, 603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, д. 65

E-mail: [mkogan@nngasu.ru](mailto:mkogan@nngasu.ru)

**Ключевые слова:** сферический робот, математическая модель, управление, отслеживание траектории.

**Аннотация:** В работе рассматривается математическая модель безотрывного движения сферического робота по произвольной неровной поверхности как с учетом скольжения сферической оболочки, так и в отсутствие скольжения. Синтезированы законы управления в форме обратной связи по состоянию, обеспечивающие движение робота вдоль заданной траектории. Работоспособность предложенных законов управления подтверждается результатами компьютерного моделирования.

## 1. Введение

В последнее время активно ведутся работы, направленные на разработку мобильных роботов, в том числе и сферических, применяемых в различных областях человеческой деятельности. В общем случае сферический робот представляет собой сферическую оболочку с движущимися внутри нее материальными телами. В качестве движителей могут быть использованы различные технические конструкции такие, как система вращающихся маховиков, набор перемещающихся масс, расположенных на взаимно перпендикулярных осях, маятник, связанный при помощи шарнира со сферической оболочкой и приводимый в движение системой моторов [1–7]. Сферические роботы относятся к классу систем с внутренними перемещающимися массами и обладают рядом отличительных свойств, характерных для таких систем. Во-первых, движение сферического робота осуществляется за счет сил трения, при-

ложенных к сферической оболочке в точке контакта с поверхностью, по которой он движется. Во-вторых, сферическая форма надежно защищает внутренности робота от внешних воздействий и загрязнения. В-третьих, сферический робот, постоянно переворачиваясь, остается между тем все время в рабочем состоянии.

В данном докладе рассматривается новая конструкция сферического робота, которую можно отнести к классу сферических роботов с маятниковым типом привода. В отличие от моделей, рассмотренных в работах [1, 2, 4, 5], где подвижным элементом является маятник, точка подвеса которого закреплена в центре сферической оболочки, в данной работе подвижным элементом является сферическая оболочка, которая может вращаться относительно внешней сферической оболочки робота. Вращение внутренней сферической оболочки относительно внешней может осуществляться, например, за счет электромагнитов, распределенных по сферической поверхности робота. Как показывает дальнейший анализ, управление таким роботом осуществить гораздо проще, чем роботом с маятником, подвешенным в центре сферической оболочки и приводимым в движение двигателем.

## 2. Уравнения движения сферического робота

Рассмотрим модель сферического робота, представляющего собой две сферические оболочки с общим центром. Внешняя оболочка имеет массу  $M$  и радиус  $R$ , а момент инерции относительно любой оси, проходящей через ее центр, равен  $J$ . На внутренней оболочке, массой которой в дальнейшем будем пренебрегать, закреплены шесть шариков таким образом, что они образуют вершины правильного октаэдра и могут свободно вращаться (рис. 1). Масса каждого шарика равна  $m$ . Силами трения между шариками и внешней оболочкой в дальнейшем пренебрежем. Предполагается, что внутренняя оболочка вращается с угловой скоростью  $\omega$ .

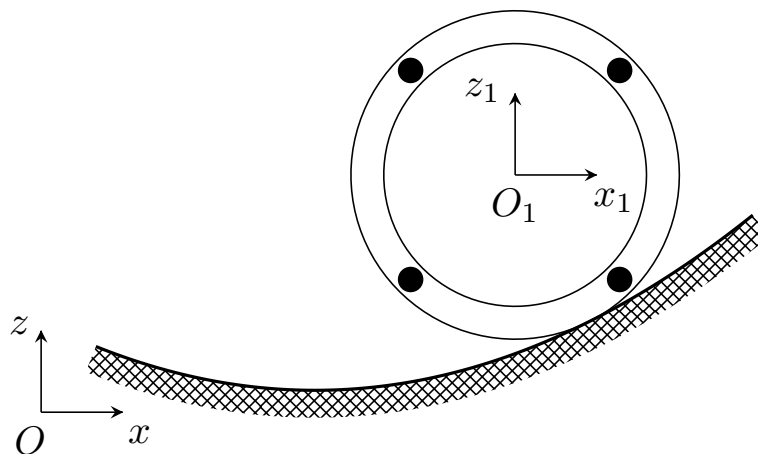


Рис. 1. Схематическая модель сферического робота

Для построения математической модели движения робота введем в рассмотрение неподвижную систему координат  $Oxyz$ , жестко связанную с опорной поверхностью, и примем, что ось  $Oz$  направлена вертикально вверх (на рисунке показано сечение робота плоскостью  $Oxz$ ). Кроме этого определим подвижную прямоугольную систему координат  $O_1x_1y_1z_1$ , центр  $O_1$  которой жестко связан с геометрическим центром

сферической оболочки робота. Оси системы координат  $O_1x_1y_1z_1$  параллельны осям неподвижной системы координат  $Oxyz$ .

Определим в координатах неподвижной системы координат  $Oxyz$  единичный вектор нормали  $\mathbf{n}$  к опорной поверхности и вектор  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ , противоположный направлению силы тяжести.

Обозначим координаты центра масс робота и его угловую скорость через  $\boldsymbol{\xi} = (x, y, z)$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  соответственно, тогда динамика системы описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$(1) \quad \begin{aligned} (M + 6m)\ddot{\boldsymbol{\xi}} &= \mathbf{F}_{\text{тр}} + N\mathbf{n} - (M + 6m)g\mathbf{k}, \\ J\dot{\boldsymbol{\Omega}} &= -4mR^2\dot{\boldsymbol{\omega}} - R[\mathbf{n} \times \mathbf{F}_{\text{тр}}], \\ N &= g(M + 6m)\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \rangle - (M + 6m)\langle \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \dot{\mathbf{n}} \rangle, \\ \mathbf{F}_{\text{тр}} &= -\kappa N \frac{\mathbf{v}_c}{|\mathbf{v}_c|}, \quad \mathbf{v}_c = \dot{\boldsymbol{\xi}} - R[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}], \end{aligned}$$

где  $\mathbf{F}_{\text{тр}}$  — сила трения между оболочкой и опорной поверхностью,  $N$  — величина силы нормального давления,  $\kappa$  — коэффициент сухого трения и  $\mathbf{v}_c$  — скорость точки контакта оболочки с поверхностью.

Для дальнейшего исследования и численного моделирования удобно перейти к безразмерным переменным, в результате чего уравнения (1) приобретают вид

$$(2) \quad \begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\xi}} &= \mathbf{F}_{\text{тр}} + N\mathbf{n} - \mathbf{k}, \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}} &= \mathbf{Q} - \gamma[\mathbf{n} \times \mathbf{F}_{\text{тр}}], \\ N &= \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \rangle - \langle \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \dot{\mathbf{n}} \rangle \\ \mathbf{F}_{\text{тр}} &= -\kappa N \frac{\mathbf{v}_c}{|\mathbf{v}_c|}, \quad \mathbf{v}_c = \dot{\boldsymbol{\xi}} - [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}], \end{aligned}$$

где  $\mathbf{Q} = -\dot{\boldsymbol{\omega}}$  — вектор управления и  $\gamma = R^2(M + 6m)/J$ . Приведенное выражение справедливо, если  $\mathbf{v}_c \neq 0$ , в противном случае скольжение отсутствует и движение осуществляется с учетом неголономной связи

$$(3) \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}].$$

В этом случае уравнения (2) можно упростить. Для этого исключим силу трения  $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ , учтем соотношение (3) и предположим, что отсутствует верчение сферической оболочки относительно вектора нормали  $\mathbf{n}$ , то есть  $\langle \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} \rangle = 0$ , тогда

$$(4) \quad (1 + \gamma)\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \gamma\mathbf{n}\langle \dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \mathbf{n} \rangle = \mathbf{Q} - \gamma[\mathbf{n} \times \mathbf{k}].$$

Кроме того, в отсутствие скольжения должно выполняться условие

$$(5) \quad |\mathbf{F}_{\text{тр}}| < \kappa N, \quad \mathbf{F}_{\text{тр}} = \ddot{\boldsymbol{\xi}} - N\mathbf{n} + \mathbf{k},$$

где величина силы реакции опоры  $N$  вычисляется согласно третьему уравнению (2).

### 3. Синтез законов управления

Теперь рассмотрим вопрос об организации движения вдоль заданной траектории, которую описывает центр сферической оболочки. Для упрощения дальнейших

выкладок предположим, что движение происходит без проскальзывания по горизонтальной плоскости  $z = 0$ , и траектория движения задана параметрическим уравнением  $\xi_0 = \Xi(t)$ , где  $\Xi(t)$  — дважды непрерывно дифференцируемая функция времени. Требуется найти вектор управления  $Q$ , обеспечивающий приближение робота к заданной траектории. Если в начальный момент времени  $t = 0$  выполняются соотношения  $\Omega(0) = [k \times \dot{\xi}(0)]$ , то вектор  $Q$  находится из уравнения (4), при этом получим

$$(6) \quad Q = Q_0 = (1 + \gamma) \Omega_0 = (1 + \gamma) [k \times \dot{\xi}_0].$$

Пусть теперь  $\Omega(0) \neq [k \times \dot{\xi}(0)]$ , в этом случае обеспечить приближение к заданной траектории можно с помощью дополнительного корректирующего управления, а именно

$$(7) \quad Q = Q_0 + \Theta (\zeta - \zeta_0), \quad \zeta = (\xi^\top, \dot{\xi}^\top)^\top, \quad \zeta_0 = (\xi_0^\top, \dot{\xi}_0^\top)^\top,$$

где матрица коэффициентов обратной связи  $\Theta$ , вообще говоря, может быть функцией времени. Для ее определения введем в рассмотрение два функционала:

$$J_1(\Theta) = \sup_{\zeta(0) \neq 0} \frac{\sup_{t \geq 0} |\zeta - \zeta_0|}{\zeta(0)^\top R \zeta(0)}, \quad J_2(\Theta) = \sup_{\zeta(0) \neq 0} \frac{\sup_{t \geq 0} |\Theta (\zeta - \zeta_0)|}{\zeta(0)^\top R \zeta(0)},$$

где  $R = R^\top > 0$  — заданная матрица. Нетрудно видеть, что первый функционал характеризует максимальное отклонение траектории движения робота от заданной траектории  $\xi_0$  вне зависимости от начальных условий, а второй — максимальное значение корректирующих управлений.

Таким образом, для определения матрицы обратной связи  $\Theta$  требуется для системы (3), (4) найти оптимальные по Парето решения двухкритериальной задачи оптимального управления с функционалами  $J_1$  и  $J_2$ .

## 4. Результаты численного моделирования

При проведении числительных экспериментов примем следующие значения параметров  $\kappa = 0.8$ ,  $\gamma = 10.5$ . Зададим требуемую траекторию движения центра масс робота в виде окружности

$$(8) \quad x_0(t) = \rho \cos at, \quad y_0(t) = \rho \sin at, \quad z_0(t) = \rho.$$

Начальные условия зададим следующим образом:

$$(9) \quad \xi(0) = (\rho, 0, 1), \quad \dot{\xi}(0) = (0, \alpha\rho, 0), \quad \Omega(0) = (-\alpha\rho + 0.1, -0.2, 0).$$

На рис. 2 при значениях параметров  $\rho = 2$  и  $\alpha = 0.5$  представлены результаты численного моделирования приближения сферического робота к движению вдоль окружности: линией черного цвета показана желаемая траектория, а красной линией — траектория движения центра сферического робота. Как можно видеть, построенное управление обеспечивает решение поставленной задачи, то есть траектория движения центра робота приближается к заданной окружности как в неголономном случае, описываемом уравнениями (3), (4), так и в общем случае, описываемом системой (2).

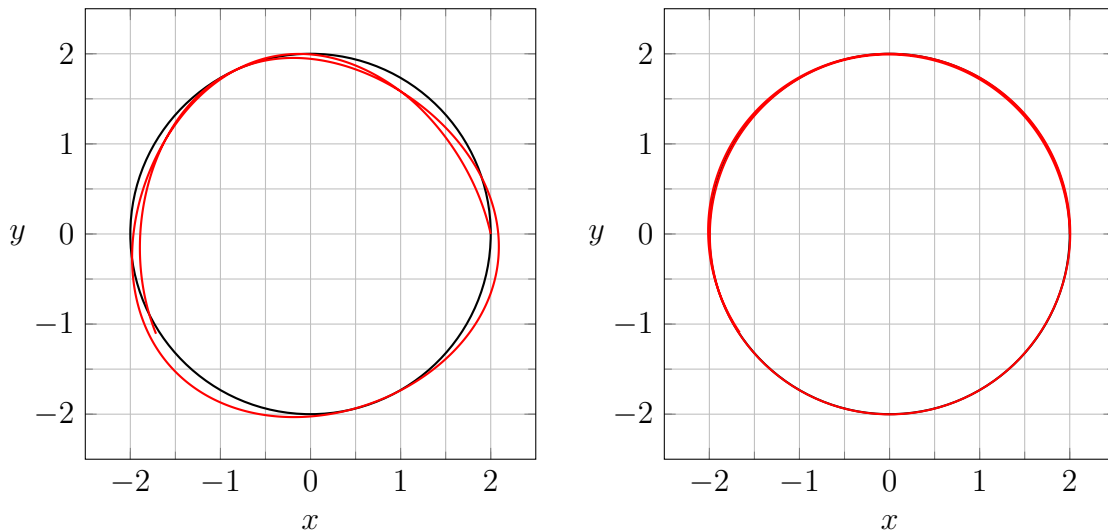


Рис. 2. Приближение центра сферического робота к заданной траектории в случае системы, описываемой уравнениями (3), (4) (левый рисунок) и в общем случае, описываемом системой (2) (правый рисунок)

## 5. Заключение

В работе рассматривается математическая модель безотрывного движения сферического робота по поверхности. Для обеспечения движения центра сферического робота вдоль заданной траектории предложено управление в форме обратной связи по состоянию. Корректность работы синтезированных законов управления продемонстрирована численными экспериментами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-41-520002, 19-01-00289).

## Список литературы

1. Баландин Д.В., Комаров М.А., Осипов Г.В. Управление движением сферического робота с маятниковым приводом // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. № 4. С. 150-163.
2. Баландин Д.В., Скучилин М.Ю. Управляемые движения сферического робота на наклонной плоскости // Журнал Средневолжского математического общества. 2013. Т. 15, № 4. С. 47-56.
3. Chase R., Pandya A. A Review of Active Mechanical Driving Principles of Spherical Robots // Robotics. 2012. Vol. 1. P. 3-21.
4. Ivanova T.B., Kilin A.A., Pivovarova E.N. Controlled motion of a spherical robot with feedback. I // J. Dyn. Control Syst. 2018. Vol. 24, No. 3. P. 497-510.
5. Ivanova T.B., Kilin A.A., Pivovarova E.N. Controlled Motion of a Spherical Robot with Feedback. II // J. Dyn. Control Syst. 2019. Vol. 25, No. 1. P. 1-16.
6. Kilin A.A., Pivovarova E.N., Ivanova T.B. Spherical Robot of Combined Type: Dynamics and Control // Regul. Chaotic Dyn. 2015. Vol. 20, No. 6. P. 716-728.
7. Koshiyama A., Yamafuji K. Design and Control of an All-Direction Steering Type Mobile Robot // International Journal of Robotics Research. 1993. Vol. 12. P. 411-419.