

УДК XXX.XX

# ЗАДАЧА О ПОКИДАНИИ ЯМЫ РОБОТОМ–КУБОМ

**А.А. Шевляков***Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: [aash29@gmail.com](mailto:aash29@gmail.com)

**Ключевые слова:** управление, односторонние связи, контакт, робототехника, прыжок.

**Аннотация:** Скоординированное движение групп роботов привлекает все большее внимание исследователей из различных дисциплин. Наибольший интерес в данный момент направлен на групповые полеты беспилотных летательных средств, так как другие виды движения более сложны для управления. Тем не менее, теория управления делает шаги к решению задач группового управления движением наземных роботов. Основным результатом данного доклада – решение задачи о взбирании робота-куба на вертикальную стену при наличии такой же стены на противоположной стороне ямы. Рассматривается двумерное движение в вертикальной плоскости. Предложено управление, решающее задачу об оптимальном отскоке от стенки ямы. На основе библиотек Box2D и ImGUI написано программное обеспечение, позволяющее моделировать движение робота и взаимодействие со средой.

## 1. Введение

Исследование возможностей нестандартных шасси для роботов остается важной проблемой, в рамках которой возникают задачи как для робототехники, так и для теории управления. В частности такие оригинальные решения (в том числе шасси в виде куба) находят применение в архитектуре как элемент самосборных конструкций. Коллектив Architectural Association's Design Research Laboratory создал ряд эскизных проектов и прототипов (noMAD, OWO, HyperCell, HEXY) [1–4, 7], в которых исследовались различные типовые автономные модули, способные перемещаться и соединяться. В Bartlett School of Architecture была разработана модель робота pizzabot [5], позволяющего возводить павильоны и мебель из типовых фанерных конструкций. В отличие от других подобных роботов, приводы в нем отделимы от конструктивных элементов, что позволяет их многократное использование. Такого рода конструкции могут быть оправданы в экстремальных условиях, в т.ч. в космосе и на других планетах, когда альтернативы подобным распределенным системам может не быть.

## 2. Задача о покидании ямы

Предположим, что робот-куб находится на дне прямоугольной ямы, стенки которой находятся на расстоянии  $L$ . В качестве управления возьмем момент, приложенный к кубу. Будем считать куб и окружающие его поверхности твердыми телами, между которыми есть сухое трение.

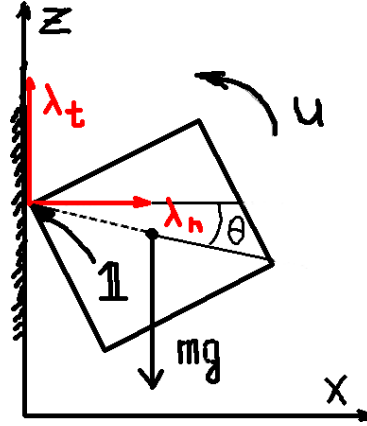


Рис. 1. Схема основных действующих сил

В качестве основного сценария рассмотрим положение куба, показанное на схеме 1.

## 3. Математическая модель

Будем считать куб твердым телом, ограниченным односторонними связями. У подобной системы может быть много режимов движения, в зависимости от положения в пространстве.

1. Свободное движение в отсутствие контакта (3 степени свободы)
2. Контакт с проскальзыванием (2 степени свободы)
3. Контакт без проскальзывания (1 степень свободы)

В данной работе мы ограничимся рассмотрением контакта с проскальзыванием, и уравнения движения запишутся в следующем виде.

$$(1) \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= \lambda_n, \\ \ddot{z} &= -g + \lambda_t, \\ \ddot{\theta} &= u - \lambda_t \cos \theta - \lambda_n \sin \theta, \end{aligned}$$

где  $x, z$  – координаты центра масс куба,  $\theta$  – угол ориентации,  $u$  – момент, приложенный к кубу,  $\lambda_t, \lambda_n$  – тангенциальная и нормальная составляющая реакции опоры соответственно. Для режима трения скольжения эти составляющие связаны соотношением  $\lambda_t = -\text{sign}(\dot{z}_1)\mu\lambda_n$ .

$z_1$  – координата  $z$  точки 1. В рассматриваемом случае  $\lambda_t = \mu\lambda_n$ .

Условие касания стены вершиной куба:  $x_1 = x - \cos \theta = 0$ .

Продифференцировав его дважды, получим выражения для силы реакции  $\lambda_n$ .

$$(2) \quad \lambda_n = \frac{\cos \theta \dot{\theta}^2 + u \sin \theta}{\mu \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta - 1}$$

Введем обозначение

$$(3) \quad L_T = \int_0^T \lambda_n dt = \int_0^T \frac{\cos \theta \dot{\theta}^2 + u \sin \theta}{\mu \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta - 1} dt,$$

где  $T$  – момент отрыва от стенки. Тогда начальная скорость в этот момент может быть записана как

$$(4) \quad V_x = V_x^+ + \int_0^T \lambda_n dt, \quad V_z = V_z^+ + \int_0^T (-g + \mu \lambda_n) dt$$

где  $V^+$  – компоненты начальной скорости после соударения.

После отрыва полет происходит по законам баллистики

$$(5) \quad z = z_0 + V_z^+ t - g \frac{t^2}{2}, \quad x = x_0 + V_x^+ t$$

Оценим максимальное расстояние между стенами, при котором по ним можно подниматься вверх. Будем считать, что для этого необходимо, чтобы координата  $z$  в конце полета была не меньше чем в начале.

Для простоты положим  $z_0 = 0$ , и найдем момент времени  $t_f$ , в который  $z$  снова обращается в 0.

Согласно соотношениям (5),

$$(6) \quad z = V_z^+ t_f - g \frac{t_f^2}{2} = 0, \quad t_f = 2 \frac{V_z^+}{g}$$

Тогда максимальная дальность полета  $x_{max} = \frac{2V_x^+ V_z^+}{g}$ .

Учитывая (4), получим  $x_{max} = 2 \frac{(V_x^+ + L_T)(V_z^+ - gT + \mu L_T)}{g}$ .

Данная функция является квадратичной по  $L_T$ , и ее максимум достигается при максимальном значении  $L_T$ .

Каков максимум  $L_T$  при ограничении  $|u| < M$ ?

$$L_T = \int_0^T \lambda_n dt = \int_0^T \frac{\cos \theta \dot{\theta}^2 + u \sin \theta}{\mu \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta - 1} dt,$$

при этом  $\theta(t)$  является траекторией системы (1):

$$(7) \quad \begin{aligned} \ddot{\theta} &= u - \lambda_t \cos \theta - \lambda_n \sin \theta, \\ \lambda_t &= \mu \lambda_n, \\ \lambda_n &= \frac{\cos \theta \dot{\theta}^2 + u \sin \theta}{\mu \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta - 1} \end{aligned}$$

с заданными в момент столкновения начальными условиями  $(x_0, V_x^0, z_0, V_z^0, \theta_0, \omega_0)$ , и условием отрыва  $\lambda_n = 0$ .

Таким образом, мы ищем максимум функционала  $L_T$  при ограничении (7) по функции  $u(t)$ .

## 4. Задача оптимизации

Чтобы определить управление, при котором достигается максимум, применим принцип максимума Понтрягина. Будем решать задачу с фиксированным левым концом, и потребуем чтобы правый лежал на поверхности  $S_1$ , задаваемой уравнением  $\lambda_n = 0$ .

**Теорема 1.** Пусть  $u^* : [t_0, t_f] \rightarrow U$  – оптимальное (глобально) управление, и пусть  $x^* : [t_0, t_f] \rightarrow \mathfrak{R}^n$  – соответствующая оптимальному управлению траектория. Тогда существует функция  $p^* : [t_0, t_f] \rightarrow \mathfrak{R}^n$  и константа  $p_0^* \leq 0$ , удовлетворяющая  $(p_0^*, p^*(t)) \neq (0, 0)$  для любого  $t \in [t_0, t_f]$  и удовлетворяющая следующим свойствам:

1)  $x^*$  и  $p^*$  являются решением канонических уравнений

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{x}^* &= H_p(x^*, u^*, p^*, p_0^*), \\ \dot{p}^* &= -H_x(x^*, u^*, p^*, p_0^*), \end{aligned}$$

с граничными условиями  $x^*(t_0) = x_0$  и  $x^*(t_f) \in S_1$ , где гамильтониан  $H$  определен как

$$H(x, u, p, p_0) := \langle p, f(x, u) \rangle + p_0 L(x, u).$$

2) Для любого фиксированного  $t$  функция  $u \rightarrow H(x^*(t), u, p^*(t), p_0^*)$  имеет глобальный максимум в  $u = u^*(t)$ , т.е. неравенство

$$H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), p_0^*) \geq H(x^*(t), u, p^*(t), p_0^*)$$

выполняется для всех  $t \in [t_0, t_f]$  и всех  $u \in U$ .

3)  $H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), p_0^*) = 0$  для всех  $t \in [t_0, t_f]$ .

Рассматриваемая постановка задачи отличается от типичной тем, что поверхность, на которой находится правый конец траектории, зависит от  $u$ . Тем не менее, поскольку  $H$  зависит от  $u$  линейно, максимум по  $u$  должен достигаться на границе множества  $|u| \leq M$ , т.е. при  $|u| = M$ .

В настоящий момент мы не готовы предоставить строгое доказательство, однако из интуитивных соображений можно предположить, что переключений между значениями  $\pm M$  быть не должно.

Таким образом, оптимальное управление  $u^* = M$ .

## 5. Моделирование

Для моделирования взаимодействия робота-куба с внешней средой была написана программа, использующая библиотеку Vox2D [6].

Для расчетов используется более сложная модель взаимодействия твердых тел, чем рассмотренная в статье, в том числе благодаря возможности столкновений с

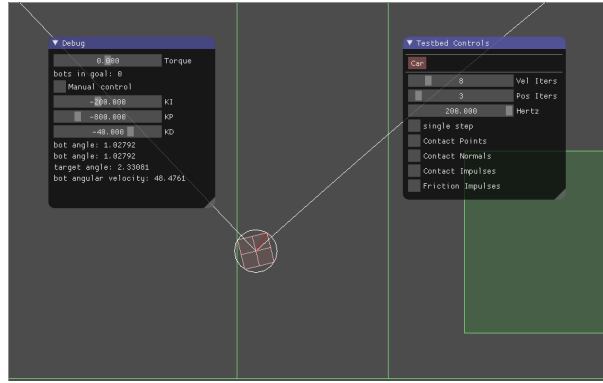


Рис. 2. Визуализация движения куба

ненулевой упругостью, учету трения покоя и возможностью переключения между режимами движения. Тем не менее, предложенное управление позволяет решить задачу покидания ямы. С кодом программного обеспечения можно ознакомиться по адресу <https://github.com/aash29/swarm>.

## 6. Результаты

Проведен анализ задачи о взбирании робота-куба на стену. Учтены ограничения на управление, получено управление, позволяющее взбираться по 2 максимально удаленным стенам. Выполнено моделирование, согласующееся с полученным результатом.

За рамками статьи остались вопросы об управлении ориентацией куба в полете и оптимальном положении куба в момент столкновения со стеной. Также представляется интересным вопрос об управлении системой с учетом всех возможных режимов взаимодействия куба со средой (трение покоя, удар), что, однако, существенно сложнее.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-31-00032.

## Список литературы

1. <http://drl.aaschool.ac.uk/portfolio/nomad/> (дата обращения: 11.01.2019).
2. <http://drl.aaschool.ac.uk/portfolio/OWO/> (дата обращения: 11.01.2019).
3. <http://drl.aaschool.ac.uk/portfolio/HyperCell/> (дата обращения: 11.01.2019).
4. <https://www.youtube.com/watch?v=hXL85ALIkzE> (дата обращения: 11.01.2019).
5. <https://vimeo.com/304108480> (дата обращения: 11.01.2019).
6. <https://box2d.org/about/> (дата обращения: 11.01.2019).
7. Chang J.-R. HyperCell: A Bio-Inspired Design Framework for Real-time Interactive Architectures // Architecture and the Built environment. 2018. No. 1. P. 1-250.
8. Liberzon D. Calculus of variations and optimal control theory: a concise introduction. Princeton University Press, 2011.