УДК 519.21

НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ НЕГАУССОВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ФИКСИРОВАННОЙ СТРУКТУРОЙ

И.М. Косачев
Военная академия Республики Беларусь
Республика Беларусь, 220057, Минск, Независимости пр., 220
E-mail: kosachev1301@mail.ru

К.Н. Чугай
Научно-исследовательский институт Вооруженных Сил
Республика Беларусь, 220103, Минск, Славинского ул., 4/3
E-mail: konstantin.ch40@gmail.com

К.А. Рыбаков
Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
Россия, 125993, Москва, Волоколамское ш., 4
E-mail: rkoffice@mail.ru

Ключевые слова: высокоточная фильтрация, случайный процесс, динамическая система, стохастическая система, фиксированная структура.

Аннотация: В докладе излагается методический подход к нелинейной фильтрации многомерных негауссовых случайных процессов, наблюдаемых в непрерывных стохастических динамических системах с фиксированной структурой. Высокая точность разработанных алгоритмов оптимальной нелинейной фильтрации обусловлена за счет итерационного учета в них высших апостериорных центральных моментов фильтруемого процесса в общем случае произвольного порядка. Адаптивность разработанных алгоритмов высокоточной нелинейной фильтрации обеспечивается путем расчета на ЭВМ в реальном времени апостериорных асимметрий и апостериорных эксцессов всех фазовых координат фильтруемого случайного процесса, последующего их сравнения с пороговыми значениями, соответствующими гауссовому фильтруемому процессу, и, при необходимости, путем итерационного учета в алгоритмах фильтрации высших апостериорных центральных моментов фильтруемого процесса.

1. Введение

При разработке вооружения и военной техники (ВВТ), а также других сложных технических систем центральной задачей является синтез алгоритмов оптимального управления ими. В теории стохастического оптимального управления для достижения поставленной цели требуется сначала решить задачу оптимальной нелинейной фильтрации случайных процессов (СП), протекающих в этих системах, а затем на основании полученных оценок фильтруемых процессов осуществить синтез алгоритмов оптимального управления ими по заданному критерию оптимальности [1-4]. Математическое описание ВВТ и других сложных технических систем во многих случаях практики можно рассматривать в классе нестационарных нелинейных непрерывных стохастических динамических систем с фиксированной структурой (ДСФС).

В настоящее время для оценивания СП $Y(t)$ наиболее широко используется теория калмановской фильтрации (КФ), которая позволяет получить замкнутые алгоритмы оценивания [2-5]. Однако теория КФ эффективно работает только при гауссовой или близкой к ней плотности распределения вероятностей (ПРВ) фильтруемого СП и линейном канале наблюдения, но достаточно часто ПРВ фильтруемого СП не является гауссовой. В современной теории оптимальной нелинейной фильтрации негауссовых СП используются приближенные методы, основанные на параметрической или функциональной аппроксимации апостериорной ПРВ, либо методы Монте-Карло.

К методам параметрической аппроксимации относятся: моментный, квазимоментный, кумулянтный (семиинвариантный), моментно-семиинвариантный методы [2-7]. Суть методов параметрической аппроксимации заключается в получении системы стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) первого порядка для определения числовых характеристик апостериорной ПРВ: начальных или центральных моментов, кумулянтов (семиинвариантов) или квазимоментов.

К методам функциональной аппроксимации негауссовой ПРВ относятся [2-8]: метод аппроксимации ПРВ отрезком ряда Грама–Шарлье, Эджворта или Лагерра; метод полигауссовой аппроксимации ПРВ, заключающийся в ее более точной аппроксимации суммой гауссовых ПРВ; метод эллипсоидальной аппроксимации и спектральный метод. Каждый из указанных методов имеет свои достоинства и недостатки.

В докладе излагается адаптивная нелинейная фильтрация многомерных негауссовых СП, наблюдаемых в стохастических ДСФС, базирующаяся на комплексном использовании методов параметрической и функциональной аппроксимации негауссовой апостериорной ПРВ, а также ряде новых научных методик авторов доклада [9,10].

Альтернативой методам параметрической и функциональной аппроксимации негауссовой апостериорной ПРВ можно считать фильтры частиц [11,12], основанные на методе Монте-Карло, а именно на моделировании СП с последующей статистической обработкой результатов. В докладе предлагается сравнить указанные методические подходы.

2. Постановка задачи нелинейной фильтрации случайных процессов в стохастических системах с фиксированной структурой

Будем полагать, что фильтрации подлежит СП $Y(t)$ размерности N_Y, описываемый системой нелинейных СДУ, понимаемых в смысле Стратоновича, с правой частью, которая содержит одно- и многоаргументные нелинейности $\Phi(y,t)$, $H(y,t)$ и мультипликативные белые шумы $V(t)$:

(1) $$\dot{Y}(t) = C(t) + D(t)Y(t) + \Phi(Y(t),t)B(t) + H(Y(t),t)V(t), \quad Y(0) = Y_0.$$

С помощью стохастического канала наблюдения проводятся измерения СП $Y(t)$. Математическая модель безынерционного нелинейного канала наблюдения с аддитивными белыми шумами $N(t)$ описывается системой нелинейных уравнений вида

(2) $$Z(t) = \Psi(Y(t),t)S(t) + \Lambda(t)N(t).$$

В уравнениях (1) и (2) $C(t)$, $D(t)$, $\Phi(y,t)$, $B(t)$, $H(y,t)$, $\Psi(y,t)$, $S(t)$ и $\Lambda(t)$ – заданные функции соответствующих размерностей, Y_0 – случайный вектор с известным начальным распределением.

Наблюдаемый процесс $Z(t)$ размерности N_Z поступает на вход оптимального фильтра, на выходе которого требуется получить оптимальную оценку фильтруемого СП $Y(t)$. В качестве оптимальных оценок СП $Y(t)$ при наличии измерений $Z(t)$ чаще всего служат [2-9,11]:

условное математическое ожидание

(3) $$\widehat{Y}(t) = \int\limits_{R^{N_Y}} y\, \widehat{\omega}(y,t/z)\, dy = \widehat{M}(t);$$

мода

(4) $$\widehat{Y}(t) = \arg \max_{y \in R^{N_Y}} \widehat{\omega}(y,t/z);$$

медиана (0,5-квантиль)

(5) $$\widehat{Y}(t) = MeY(t), \text{ где } m = MeY(t): \int\limits_{-\infty}^{m} \widehat{\omega}(y,t/z)\, dy = \int\limits_{m}^{\infty} \widehat{\omega}(y,t/z)\, dy = 0,5.$$

Отметим, что мода и медиана в общем случае могут иметь более одного значения, медиана определена для одномерного случая $N_Y = 1$.

Апостериорная ПРВ $\widehat{\omega}(y,t/z)$ фильтруемого СП $Y(t)$, входящая в выражения (3)–(5), описывается известным уравнением Р.Л. Стратоновича [2-5]. Однако его аналитическое решение может быть получено только в простейших случаях.

Проведенные исследования показали, что при решении задачи высокоточной нелинейной фильтрации негауссовых многомерных СП, наблюдаемых в непрерывных стохастических ДСФС, необходимо комплексно использовать как методы параметрической, так и функциональной аппроксимации апостериорной ПРВ [8, 9], в частности: «обычный» и модифицированный моментно-семиинвариантный методы, разработанные М.Л. Дашевским, А.Г. Кошкаровой и В.И. Шином [6, 7]; методы аппроксимации апостериорной ПРВ отрезком ряда Эджворта или Лагерра.

Данные методы позволяют интегрировать более простые дифференциальные уравнения для апостериорных центральных моментов фильтруемого СП, а выбор максимального порядка учитываемых апостериорных центральных моментов производится путем расчета по формулам связи апостериорных кумулянтов (семиинвариантов) фильтруемого СП с последующим приравниванием нулю нормированных к дисперсии кумулянтов высших порядков, значения которых равны и меньше заданных пороговых значений (например, 2–5% от значения апостериорных дисперсий $\widehat{D}_p$, которые характеризуют точность фильтрации).

3. Фильтрация негауссовых случайных процессов в стохастических системах с фиксированной структурой

Данная реализация включает семь основных этапов, каждый из которых состоит из нескольких подэтапов [9].

На первом этапе получено универсальное стохастическое интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ) для апостериорного центрального момента произвольного R-го порядка $\widehat{\mu}_{r_1 r_2 \ldots r_R} \triangleq \langle \overset{\circ}{Y}_{r_1} \overset{\circ}{Y}_{r_2} \ldots \overset{\circ}{Y}_{r_R} \rangle$ фильтруемого негауссового СП $Y(t)$.

На втором этапе на основании данного универсального ИДУ записаны универсальные уравнения для апостериорных центральных моментов первых шести порядков для фильтруемого СП $Y(t)$. Универсальность этих уравнений состоит в том, что в них производные апостериорных центральных моментов $\widehat{M}_p$, $\widehat{D}_{pk}$, $\widehat{\mu}_{pki}$, $\widehat{\mu}_{pkij}$ и т.д. не зависят от конкретного вида математических моделей фильтруемого СП (например, вида (1)) и канала наблюдения (например, вида (2)), а выражены через их обобщенные характеристики, т.е. через коэффициенты вектора сноса, элементы матрицы диффузии и обновляющий процесс.

На третьем этапе получены развернутые системы стохастических ИДУ для апостериорных центральных моментов произвольного R-го и первых шести порядков фильтруемого СП, исходя из заданного вида математических моделей фильтруемого СП $Y(t)$ и канала наблюдения $Z(t)$.

На четвертом этапе с использованием метода статистической аппроксимации произвольных одно- и многоаргументных нелинейностей [9, 10] осуществлено сведение полученных на третьем этапе ИДУ к СДУ для апостериорных центральных моментов произвольного R-го и первых шести порядков фильтруемого СП $Y(t)$.

На пятом этапе получены формулы связи апостериорных центральных моментов произвольного R-го порядка с апостериорными кумулянтами СП $Y(t)$. Знание апостериорных кумулянтов необходимо для обоснованного усечения и замыкания полученных на четвертом этапе уравнений для апостериорных центральных моментов с использованием правил «обычного» или модифицированного моментно-семиинвариантного метода [2-7,9].

На шестом этапе проведен синтез высокоточных оптимальных нелинейных фильтров в соответствии с выбранным критерием оптимальности фильтрации.

При использовании в качестве критерия оптимальности минимума среднего квадрата ошибки фильтрации (СКО-оценка) в качестве оптимальной оценки p-й ($p=1,...,N_Y$) фазовой координаты N_Y -мерного фильтруемого СП $Y(t)$ принимается ее апостериорное математическое ожидание, т.е. $\widehat{Y}_p = \widehat{M}_p$.

При использовании в качестве критерия оптимальности максимум апостериорной ПРВ оптимальная оценка p-й фазовой координаты СП $Y(t)$ с точностью до учета апостериорных центральных моментов третьего $\widehat{\mu}_{ppp} = \widehat{\mu}_{3p}$ и четвертого $\widehat{\mu}_{pppp} = \widehat{\mu}_{4p}$ порядков (или, что одно и то же, с точностью до учета ее апостериорных асимметрии $\widehat{\gamma}_{1p}$ и эксцесса $\widehat{\gamma}_{2p}$) рассчитывается так [9]:

$$\widehat{Y}_p = \widehat{M}_p + \frac{3\widehat{\mu}_{3p}}{4\widehat{D}_p} - \frac{5\widehat{\mu}_{3p}\widehat{\mu}_{4p}}{12\widehat{D}_p^3}. \tag{6}$$

Выражение (6) получено путем аппроксимации апостериорной ПРВ $\widehat{\omega}(y,t/z)$ рядом Эджворта по полиномам Чебышева–Эрмита с точностью до седьмого члена ряда, рассчитываемых через апостериорные нормированные кумулянты k-го порядка $\widehat{\chi}_k$ и нахождения тех кумулянтов, при которых частная производная по ним от апостериорной ПРВ равна нулю, с последующей заменой апостериорных нормированных кумулянтов на апостериорные центральные моменты фильтруемого СП.

Если фильтруемый СП $Y(t)$ является существенно негауссовым, то для повышения точности фильтрации в ряде Эджворта следует учитывать большее число членов ряда. В случае если апостериорная ПРВ равна нулю при отрицательных значениях аргумента (например, показательная или рэлеевская), то вместо ряда Эджворта целесообразно использовать аппроксимацию апостериорной ПРВ с помощью ряда Лагерра.

На седьмом этапе осуществляется численное интегрирование на ЭВМ системы стохастических дифференциальных уравнений для апостериорных центральных моментов до четвертого порядка включительно, проверка фильтруемого СП $Y(t)$ на гауссовость (путем расчета модулей апостериорных коэффициентов асимметрии $\widehat{\gamma}_{1p}$ и эксцесса $\hat{\gamma}_{2p}$ всех p-х фазовых координат), уточнение при необходимости итерационным образом порядка рассчитываемых апостериорных центральных моментов фильтруемого СП и нахождение его оптимальных оценок в соответствии с выбранным критерием оптимальности фильтрации согласно (3)–(5). Проверка на гауссовость проводится следующим образом: если модуль величины асимметрии не превышает 0,25 и модуль величины эксцесса не превышает 0,5, то с вероятностью 0,95 такой фильтруемый СП является гауссовым. Если все фазовые координаты имеют нормальную ПРВ, то такой фильтруемый СП является гауссовым и в этом случае ЭВМ автоматически не учитывает в алгоритмах фильтрации апостериорные центральные моменты выше второго порядка. В противном случае ЭВМ автоматически итерационным образом учитывает в алгоритмах фильтрации высшие центральные моменты для тех фазовых координат, которые не являются гауссовыми.

Для проверки работоспособности и эффективности описанного методического подхода к решению задачи нелинейной фильтрации предлагается сравнить на модельных примерах алгоритмы высокоточной нелинейной фильтрации, использующие методы параметрической и функциональной аппроксимации негауссовой апостериорной ПРВ, и алгоритмы непрерывных фильтров частиц, основанные на методе Монте-Карло [11]. В основе последних лежит моделирование траекторий стохастической ДСФС согласно уравнению (1). Каждой траектории ставится в соответствие весовая функция, значения которой вычисляются на основе измерений (2). Получение оценок фильтруемого СП осуществляется с помощью статистической обработки результатов моделирования: нахождение по траекториям среднего, моды либо медианы в зависимости от заданного критерия оптимальности согласно (3)–(5) с учетом весовых функций. С развитием вычислительной техники методы Монте-Карло для фильтрации СП можно применять в реальном времени для достаточно сложных стохастических ДСФС [12].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-08-00530а).

Список литературы

1. Методы классической и современной теории автоматического управления: в 5 т. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
2. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Теория стохастических систем. М.: Логос, 2004. 1000 с.
3. Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. М.: Унив. кн., Логос, 2006. 640 с.
4. Современная и прикладная теория управления: Оптимизационный подход к теории управления: в 3 т. / Под ред. А.А. Колесникова. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000.
5. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Едиториал УРСС, 2004. 400 с.
6. Дашевский М.Л. Семиинвариантный метод замыкания уравнений для моментов в задачах анализа нелинейных систем // Проблемы управления и теория информации. 1975. № 4. С. 317–328.
7. Кошкарова А.Г., Шин В.И. Модифицированные семиинвариантные методы анализа стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 1986. № 2. С. 69–79.
8. Рыбаков К.А. Спектральный метод фильтрации и прогнозирования в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа // Научный вестник МГТУ ГА. 2016. № 224 (2). С. 14–23.
9. Косачев И.М. Методология высокоточной нелинейной фильтрации случайных процессов в стохастических динамических системах с фиксированной структурой // Вестник Воен. акад. Респ. Беларусь. 2014. № 4 (45). С. 125–161.
10. Косачев И.М., Ерошенков М.Г. Аналитическое моделирование стохастических систем. Минск: Наука и техника, 1993. 264 с.
11. Рыбаков К.А. Статистические методы анализа и фильтрации в непрерывных стохастических системах. М.: Изд-во МАИ, 2017. 176 с.
12. Рыбаков К.А., Ющенко А.А. Непрерывные фильтры частиц и их реализация в реальном масштабе времени // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2018. № 3. С. 56–64.