УДК 519.21

# НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ НЕГАУССОВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ

**И.М. Косачев**
*Военная академия Республики Беларусь*
Республика Беларусь, 220057, Минск, Независимости пр., 220
E-mail: kosachev1301@mail.ru

**К.Н. Чугай**
*Научно-исследовательский институт Вооруженных Сил*
Республика Беларусь, 220103, Минск, Славинского ул., 4/3
E-mail: konstantin.ch40@gmail.com

**Ключевые слова:** высокоточная фильтрация, случайный процесс, стохастическая динамическая система, случайная структура

**Аннотация:** В докладе излагается решение задачи высокоточной нелинейной фильтрации смешанных непрерывно-дискретных случайных процессов, наблюдаемых в стохастических динамических системах со случайно изменяющейся во времени структурой с помощью канала наблюдения случайной структуры, что наряду, с учетом высших апостериорных центральных моментов фильтруемого процесса в общем случае произвольного порядка позволяет обеспечить высокую точность разработанных алгоритмов.

## 1. Введение

Основными отличительными особенностями задачи оптимальной нелинейной фильтрации случайных процессов, наблюдаемых в динамических системах со случайной структурой (ДССС), по сравнению с динамическими системами с фиксированной структурой (ДСФС) [1,2] являются следующие [3-8]:

1) фильтрации (оптимальному оцениванию) подлежит не только случайный процесс $Y^{(l)}(t)$ в каждом $l$-м $(l=\overline{1,S})$ состоянии структуры ДССС, но и дискретный немарковский случайный процесс смены ее состояния структуры $L(y,t)$;

2) при фильтрации линейного гауссового случайного процесса $Y^{(l)}(t)$ линейным каналом наблюдения с аддитивным шумом апостериорная плотность распределения вероятностей (АПРВ) наблюдаемого процесса на выходе канала наблюдения является негауссовой, а при фильтрации в ДСФС – гауссовой;

3) получение оптимальной оценки фильтруемого процесса $Y^{(l)}(t)$ отдельно для каждого $l$-го состояния структуры ДССС не гарантирует оптимальности оценки совокупного случайного процесса $Y^{(l)}(t)$ с учетом всех $S$ возможных состояний структуры.

## 2. Постановка задачи нелинейной фильтрации случайных процессов в стохастических системах со случайной структурой

Под фильтрацией смешанного случайного процесса $\left[(Y^{(l)}(t))^{\mathrm{T}}, L(Y^{(l)}, t)\right]^{\mathrm{T}}$ в ДССС понимается определение наиболее вероятных значений реализаций вектора фазовых координат $(Y^{(l)}(t))^{\mathrm{T}}$ и дискретного, в общем случае немарковского, процесса смены состояний структуры $L(Y^{(l)}, t)$ в текущий момент времени $t$ на основании их наблюдения $Z^{(l)}(t)$ до момента времени $t$ с помощью канала наблюдения случайной структуры (КНСС) и априорной информации о данных процессах.

Будем полагать, что фильтрации подлежат:

– многомерный случайный процесс $Y^{(l)}(t)$, описываемый в каждом $l$-м $(l=\overline{1,S})$ состоянии структуры ДССС своей системой нелинейных стохастических дифференциальных уравнений с произвольной правой частью вида (1), которая имеет произвольную размерность, равную $N_Y^{(l)}$, содержит произвольные одно- и многоаргументные нелинейности $\varphi_j^{(l)}(y^{(l)}, t)$ и аддитивные белые шумы $V_m^{(l)}(t)$

(1) $$\dot{y}_p^{(l)} = c_p^{(l)}(t) + \sum_{i=1}^{N_y} d_{pi}^{(l)}(t)\, y_i^{(l)}(t) + \sum_{j=1}^{N_\varphi} b_{pj}^{(l)}(t)\, \varphi_j^{(l)}(y^{(l)}, t) + \sum_{m=1}^{N_v} h_{pm}^{(l)}(t) V_m^{(l)}(t);$$

– дискретный немарковский процесс смены состояния структуры ДССС $L(y,t)$, представляющий собой условно Марковский, который задается условными вероятностями перехода структуры ДССС из $r$-го состояния в $l$-е на малом интервале времени от $t$ до $t+\Delta t$ выражением вида [1-8]

(2) $$P\{L(t+\Delta t)=l\,/\,L(t)=r,\,Y(t)=y\} = \begin{cases} \nu^{(r,l)}(y,t)\Delta t + o(\Delta t) & \text{при } l \neq r \\ 1-\sum\limits_{\substack{q=1\\ q\neq l}}^{S} \nu^{(r,q)}(y,t)\Delta t + o(\Delta t) & \text{при } l = r \end{cases},$$

где $P\{\cdot\}$ – вероятность события, стоящего в фигурных скобках;

– $\nu^{(r,l)}(y,t)$ – интенсивность перехода ДССС в момент времени $t$ из состояния $r$ в состояние $l$ при условии, что значение случайного вектора фазовых координат $Y$ равно $y$.

Выходные процессы ДССС в каждом $l$-м состоянии структуры наблюдаются (измеряются) с помощью «своего» многомерного безынерционного нелинейного КНСС, математическая модель которого задается уравнением вида

(3) $$z_p^{(l)}(t) = \sum_{n=1}^{N_\psi} s_{pn}^{(l)}(t)\, \psi_n^{(l)}(y^{(l)}, t) + \sum_{i=1}^{N_N} m_{pi}^{(l)}(t) N_i^{(l)}(t).$$

Регистрируемый наблюдаемый процесс $Z^{(l)}(t)$ поступает на вход оптимального фильтра, на выходе которого требуется получить оптимальную оценку вектора фазовых координат $Y^{(l)}(t)$ и дискретного процесса смены состояния структуры ДССС $L(Y^{(l)}, t)$.

Такая постановка задачи (ДССС + КНСС) обобщает случай фильтрации процессов в системах с разделением времени, когда имеется ДССС с $S$ состояниями структуры и всего один КН (ДССС + КН), на вход которого поочередно подаются выходные процессы в каждом из состояний ДССС, а также в системах с комплексированием измерителей, когда имеется одна стохастическая ДСФС и $S$ каналов наблюдения (ДСФС + КНСС), которые в зависимости от складывающейся обстановки подключаются к выходу наблюдаемой системы в общем случае в случайные моменты времени [6].

## 3. Фильтрация негауссовых случайных процессов в стохастических системах со случайной структурой

Данная реализация включает следующие девять основных этапов работ, каждый из которых состоит из нескольких подэтапов [6].

*На первом этапе* определяется возможное число фиксированных состояний структуры ДССС в процессе ее функционирования, осуществляется их нумерация (в порядке появления), составляется граф изменения состояний структуры ДССС и определяется тип условий смены этих состояний (автономные, не зависящие от значений фазовых координат; полуавтономные, зависящие от их вероятностных характеристик и неавтономные, функционально зависящие от фазовых координат).

*На втором этапе* записываются:

– универсальное уравнение Стратоновича – Артемьева для совместной (ненормированной) первой АПРВ совокупного процесса $\left\{ \hat{Y}^{(l)}(t),\, \hat{L}(y,t) \right\}^{\mathrm{T}}$, определяемой так: $\hat{\omega}_1(y,l,t) \triangleq P\left\{Y(t)=y, L(t)=l\right\}$ [5,6];

– универсальное уравнение Стратоновича – Казакова для условной (нормированной) первой АПРВ этого же совокупного процесса, определяемой следующим образом: $\hat{\omega}_1^{(l)}(y,t) \triangleq P\left\{Y(t)=y \,/\, L(t)=l\right\}$ [5,6].

Указанные уравнения являются нелинейными относительно АПРВ из-за наличия в них квадратичных функционалов от этих АПРВ.

*На третьем этапе* с использованием уравнения Стратоновича – Казакова получено универсальное (выраженное через компоненты вектора сноса $A_{r_n}^{(l)}(y,t)$, матрицы диффузии $B_{r_n r_s}^{(l)}(y,t)$ и обновляющего процесса $f^{(l)}(Y,z,t)$) стохастическое интегро-дифференциальное уравнение для апостериорных центральных моментов произвольного $R$-го ($R$ = 1, 2, 3, 4,…) порядка $\dot{\hat{\mu}}_{r_1 r_2 .. r_R}^{(l)}$ фильтруемого многомерного процесса случайной структуры $Y^{(l)}(t)$. На данном этапе также путем интегрирования уравнения Стратоновича – Артемьева в бесконечных пределах получено интегро-дифференциальное уравнение для расчета апостериорных вероятностей состояний структуры ДССС $\hat{P}^{(l)}(t), \hat{P}^{(r)}(t)$, входящих в универсальное уравнение для апостериорных центральных моментов. Эту задачу в оптимальном фильтре решает идентификатор состояний ДССС.

*На четвертом этапе* на основании общего универсального стохастического интегро-дифференциального уравнения для апостериорных центральных моментов произвольного $R$-го порядка записаны аналогичные универсальные уравнения для апостериорных центральных моментов первых шести (на практике, как правило, больше не требуется) порядков $(R \le 6)$ для многомерного и одномерного фильтруемого процесса $Y^{(l)}(t)$ в $l$-м $(l=\overline{1,S})$ состоянии структуры ДССС.

*На пятом этапе* получены развернутые системы стохастических интегро-дифференциальных уравнений для апостериорных центральных моментов произвольного $R$-го и первых шести порядков $\dot{\hat{M}}_p^{(l)}$, $\dot{\hat{D}}_{pk}^{(l)}$, $\dot{\hat{\mu}}_{pki}^{(l)}$, $\dot{\hat{\mu}}_{pkij}^{(l)}$ и т. д., исходя из конкретного вида математических моделей для фильтруемого процесса $Y^{(l)}(t)$, интенсивностей смены состояний структуры $\nu^{(l,r)}(y,t)$ и $\nu^{(r,l)}(y,t)$, канала наблюдения $Z^{(l)}(t)$ и апостериорных вероятностей $\dot{\hat{P}}^{(l)}(t)$ и $\dot{\hat{P}}^{(r)}(t)$ ДССС.

*На шестом этапе* с использованием метода статистической аппроксимации нелинейностей произвольного вида [1,2,6] осуществлено сведение развернутых систем стохастических интегро-дифференциальных уравнений, полученных на пятом этапе, к соответствующим системам стохастических дифференциальных уравнений для апостериорных центральных моментов фильтруемого процесса $Y^{(l)}(t)$ для каждого $l$-го состоянии структуры ДССС.

*На седьмом этапе* осуществляется усечение и замыкание системы стохастических дифференциальных уравнений для апостериорных центральных моментов требуемого порядка фильтруемого процесса в каждом $l$-м состоянии структуры ДССС. Эта задача решается путем расчета апостериорных кумулянтов фильтруемого процесса $Y^{(l)}(t)$ для каждого $l$-го состояния структуры ДССС по формулам связи апостериорных кумулянтов $\hat{\chi}_{\bar{r}}^{(l)}$ и центральных моментов $\hat{\mu}_{\bar{r}}^{(l)}$ с последующим использованием правил усечения «обычного» или модифицированного моментно-семиинвариантного методов [9,10].

*На восьмом этапе* по другим формулам связи [1,2,6] рассчитываются безусловные (итоговые с учетом наличия $S$ состояний структуры) апостериорные центральные моменты фильтруемого вектора фазовых координат ДССС $\hat{M}_p$, $\hat{D}_{pk}$, $\hat{\mu}_{pki}$, $\hat{\mu}_{pkij}$ и т. д.

*На девятом этапе* осуществляется выбор критерия оптимальности фильтрации случайных процессов $Y^{(l)}(t)$ и $L(t)$, а также синтез оптимального фильтра, соответствующего выбранному критерию.

Критерии в этой статье не описаны. Можно, наверное, словами оставить, но без «первый» и «второй».

*При использовании критерия оптимальности фильтрации* – минимума среднего квадрата ошибки фильтрации $\left\langle (Y(t)-\hat{Y}(t)^2 \right\rangle = \min$ – в качестве оптимальной оценки фильтруемого процесса случайной структуры $\left\{ Y^{\mathrm{T}}(t),\ L(t) \right\}^{\mathrm{T}}$ выбираются:

1) При наблюдаемых моментах переключения состояния структуры ДССС:

а) для дискретного процесса $\hat{L}(t)$ – наблюдаемое состояние $l$, т. е. $\hat{L}(t) \equiv l$;

б) для $p$-й фазовой координаты $\hat{Y}_p(t)$ – ее апостериорное математическое ожидание, т. е. $\hat{Y}_p^{(l)}(t) = \hat{M}_p^{(l)}(t)$.

2) При ненаблюдаемых моментах переключения состояния структуры ДССС:

а) в качестве оптимальной оценки состояния структуры ДССС $\hat{L}(t)$ принимается то состояние, при котором апостериорная вероятность в данный момент времени максимальна, т. е.

$$\hat{L}(t) = \left\{ l : \hat{P}^{(l)}(t) = \max_{r=\overline{1,S}} \hat{P}^{(r)}(t) \right\}; \tag{4}$$

б) для $p$-й фазовой координаты в $l$-м состоянии структуры $\hat{Y}_p^{(l)}(t) = \hat{M}_p^{(l)}(t)$, а с учетом всех состояний структуры ДССС оптимальная оценка рассчитывается так:

(5) $$\hat{Y}_p(t) = \sum_{l=1}^{S} \hat{P}^{(l)}(t)\,\hat{M}_p^{(l)}(t).$$

*При использовании критерия оптимальности фильтрации* – максимума апостериорной ПРВ фильтруемого случайного процесса:

1) При наблюдаемых моментах переключения состояния структуры ДССС:

а) оптимальная оценка наблюдаемого состояния структуры вычисляется так $\hat{L}(t) \equiv l$;

б) оптимальная МАП-оценка для $p$-й фазовой координаты в $l$-м состоянии структуры рассчитывается по следующей формуле:

(6) $$\hat{Y}_p^{(l)}(t) = Mod\,\hat{\omega}_1^{(l)}(Y_p, t) = \hat{M}_p^{(l)}(t) + \frac{3\hat{\mu}_{3p}^{(l)}(t)}{4\hat{D}_p^{(l)}(t)} - \frac{5\hat{\mu}_{3p}^{(l)}(t)\,\hat{\mu}_{4p}^{(l)}(t)}{12\left(\hat{D}_p^{(l)}(t)\right)^3},$$

где $Mod$ – мода условной АПРВ;

$\hat{M}_p^{(l)}(t),\ \hat{D}_p^{(l)}(t),\ \hat{\mu}_{3p}^{(l)}(t), \hat{\mu}_{4p}^{(l)}(t)$ – апостериорные математическое ожидание, дисперсия, третий и четвертый центральные моменты $p$-й фазовой координаты соответственно.

2) При ненаблюдаемых моментах переключения структуры ДССС:

а) оптимальная оценка состояния структуры также рассчитывается по формуле (4);

б) оптимальная МАП-оценка $p$-й фазовой координаты в $l$-м состоянии – по формуле (6), а итоговая (безусловная) МАП-оценка $p$-й фазовой координаты вычисляется так:

(7) $$\hat{Y}_p(t) = Mod \sum_{l=1}^{S} \hat{\omega}_1^{(l)}(Y_p, t)\hat{P}^{(l)}(t) = \hat{M}_p(t) + \frac{3\hat{\mu}_{ppp}(t)}{4\hat{D}_{pp}(t)} - \frac{5\hat{\mu}_{ppp}(t)\,\hat{\mu}_{pppp}(t)}{12(\hat{D}_{pp}(t))^3}.$$

Знание апостериорных высших центральных моментов позволяет повысить точность оптимальной нелинейной фильтрации при оценивании негауссовых случайных процессов, при нелинейном КНСС.

## Список литературы


1. Косачев И.М. Методология высокоточной нелинейной фильтрации случайных процессов в стохастических динамических системах с фиксированной структурой // Вестник Воен. акад. Респ. Беларусь. 2014. № 4 (45). С. 125-161.
2. Косачев И.М., Чугай К.Н., Рыбаков К.А. Нелинейная фильтрация негауссовых случайных процессов в стохастических системах с фиксированной структурой // Труды XIII Всероссийского совещания по проблемам управления. Москва, 17–20 июня 2019 г. М.: Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, 2019.
3. Бухалев В.А. Распознавание, оценивание и управление в системах со случайной скачкообразной структурой. М.: Наука, 1996. 288 с.
4. Бухалев В.А. Оптимальное сглаживание в системах со случайной скачкообразной структурой. М.: Физматлит, 2013. 188 с.
5. Казаков И.Е., Артемьев В.М. Оптимизация динамических систем случайной структуры. М.: Наука, 1980. 368 с.
6. Косачев И.М. Методология высокоточной оптимальной фильтрации случайных процессов, наблюдаемых в стохастических динамических системах со случайно изменяющейся структурой (части 1-3) // Вестник Воен. акад. Респ. Беларусь. 2016. № 3 (52). С. 57-66, № 4 (53). С. 64-73; 2017. № 1 (54). С. 56-65.
7. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Теория стохастических систем: учеб. пособие. М.: Логос, 2004. 1000 с.
8. Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева: учеб. пособие. М.: Унив. кн., Логос, 2006. 640 с.
9. Дашевский М.Л. Семиинвариантный метод замыкания уравнений для моментов в задачах анализа нелинейных систем // Проблемы управления и теория информации. 1975. № 4. С. 317-328.
10. Кошкарова А.Г., Шин В.И. Модифицированные семиинвариантные методы анализа стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 1986. № 2. С. 69-79.