УДК 519.213

ЕС-АЛГОРИТМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ МЕТОДА ИДЕНТИФИКАЦИИ ПОЛИМОДАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

В.Б. Куликов
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
Россия, 603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24
E-mail: vb.kulikov@yandex.ru

В.П. Хранилов
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
Россия, 603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24
E-mail: hranilov@nntu.nnov.ru

А.Б. Куликов
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
Россия, 603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24
E-mail: akulikov@nntu.ru

Ключевые слова: стохастические задачи управления, идентификация, полимодальные плотности распределения, плохая обусловленность матриц, ЕС-алгоритм регуляризации, минимизация функционалов.

Аннотация: Рассмотрен метод идентификации полимодальных плотностей распределения случайных величин с анализом обусловленности матриц при минимизации соответствующего функционала в задачах управления, прогнозирования, мониторинга. Искомыми являются коэффициенты разложения функции плотности вероятности по выбранной системе базисных функций (тригонометрические функции или специальные полиномы). Показано, что если минимизации функционала отвечает плохая обусловленность системы уравнений (этап вычисления коэффициентов разложения) - необходимо применять алгоритм регуляризации решений. Предложена и обоснована регуляризация базового метода идентификации плотностей распределения на основе ЕС-алгоритма. Классический ЕС-алгоритм модифицирован в рамках оригинальной методики на случай векторной регуляризации.

1. Введение

Стохастические системы управления – динамично развивающееся направление системного анализа, управления и обработки информации. Оно включает, в частности, задачи анализа и синтеза робастного управления [1, 2]. Наиболее сложными при этом являются ситуации, когда функции плотности вероятности параметров или характеристик структур и систем имеют сложные виды распределения (полимодальные, Коши, гамма-распределения и др.). Один из подходов к робастному синтезу, когда априорно известна плотность распределения неопределенности, отличная от равномерной, изложен в [1]. В такой постановке исследованы стохастические задачи с одномодальными плотностями распределения.

Представленный доклад посвящен рассмотрению универсального метода идентификации плотностей распределения стохастических неопределенностей и его развитию в рамках алгоритмов регуляризации. Изучаемые законы распределения стохастических характеристик могут иметь сложный вид и подлежат идентификации.

В методе идентификации полимодальных плотностей распределения случайных величин [3, 4] необходимым этапом является анализ обусловленности матриц при минимизации базовых функционалов и алгоритмическое встраивание в него (при плохой обусловленности задачи) алгоритма регуляризации решений. Как показывают вычислительные эксперименты, при некоторых особенностях сингулярного спектра матриц уравнений, эквивалентных минимизируемым функционалам, возможны недопустимые искажения решения.

К таким особенностям относятся случаи, когда в сингулярном спектре матрицы наблюдается быстрый спад величин сингулярных чисел до уровня 10^{-12} и ниже или неудачно выбран функциональный базис разложения.

Этот факт имеет принципиальное значение, поскольку возможная плохая обусловленность матриц может приводить к неустойчивым и ошибочным решениям, делая процедуру восстановления закона распределения случайных величин некорректной.

При регуляризации задач идентификации законов распределения случайных величин (СВ) предлагается применить классический алгоритм ЕС регуляризации (эпсилон-структуризация), а также разработанную в ходе исследований его оригинальную модификацию на случай векторной регуляризации.

В докладе также рассматриваются оригинальные и модифицированые методы регуляризации сингулярных разложений при решении плохо обусловленных систем линейных уравнений, учитывающие указанные выше особенности.

Алгоритм ЕС является разновидностью метода регуляризации А.Н. Тихонова. В общем случае это алгоритм решения одномерных обратных задач, основанный на методе регуляризации интегрального уравнения Фредгольма.

Метод регуляризации А.Н. Тихонова [5] заключается в сведении интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений, решение которой ищется при ограничении на величину нормы решения. С помощью формулы численного интегрирования интегральное уравнение заменяется системой уравнений $R\varphi \approx y,$ где R – соответствующая матрица размера $l{\times}n$, y – вектор, составленный из l независимых замеров наблюдаемой функции.

Поскольку ЕС алгоритм методологически наиболее проработан как метод стохастической регуляризации (в рамках задачи многомерной линейной регрессии), выбор этого метода регуляризации в качестве более общего (в сравнении с классическим регуляризирующим алгоритмом А.Н. Тихонова) представляется обоснованным и корректным [6].

2. Метод решения задачи

Итак, при минимизации базового функционала задачи идентификации, необходимо решить систему уравнений в условиях ограничения [7] $\|\varphi\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2 \le r^2$, что эквивалентно минимизации сглаживающего функционала

$$M^{\alpha}(\varphi) = \|y - R\varphi\|^2 + \alpha\|\varphi\|^2,$$

где α – соответствующий ограничению параметр регуляризации (множитель Лагранжа). В терминах матричных операторов решается регуляризованная нормальная система

(1) $$(R^T R + \alpha E)\varphi = R^T y.$$

Алгоритм ЕС состоит из ряда шагов:

1. Вводится ε-сеть в пространстве решений системы, состоящая из векторов следующего вида

$$V = \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon \mu_j}{\lambda_j} \psi_j ,$$

где λ_jи ψ_j – собственные числа и собственные векторы матрицы $R^T R$, μ_j – произвольные целые числа, ε – скалярный параметр, задающий шаг ε- сети.

2. При фиксированном значении параметра α решается нормальная система (1), ищется узел ε- сети, ближайший к найденному решению φ_α.

3. Далее оценивается качество решения φ_αпри фиксированном α, которое складывается из двух составляющих: оценка величины функционала среднего риска, достигнутая на векторе V_α (ближайшем узле ε- сети) плюс оценка изменения величины этого же функционала при переходе от φ_α к V_α. Итоговая оценка $J(\alpha)$ – функционала [7] зависит от: η – вероятности справедливости этой оценки и k – числа линейно независимых узлов ε-сети, удовлетворяющих условию $\| V\| \leq \|\varphi_\alpha\|$.

Минимизацией оценки по αи ε определяется величина параметра регуляризации αи величина ограничения *r*, при которой полученное решение φ_αоптимально при заданном объеме экспериментальных данных.

Важно отметить, что ЕС алгоритм для задач регрессии строит смещенные, но лучшие относительно среднеквадратического уклонения гребневые оценки (при некоторых ограничениях на величину погрешности исходных данных), чем метод наименьших квадратов в классической постановке [6]. Эти оценки более устойчивы, чем МНК-оценки, поскольку вызванное ими уменьшение дисперсии ошибок больше, чем требуется для компенсации введенного смещения.

В работе предлагается авторская модификация этого алгоритма с учетом применения пакета MATLAB, а именно:

- замена алгоритма нахождения собственных чисел и собственных функций (реализуется стандартной процедурой EIGEN в системе FORTRAN) на алгоритм пакета MATLAB для вычислений посредством ортогональных подобных преобразований с матрицей в верхней форме Хессенберга и использованием QR-алгоритма Франсиса и Кублановской;
- замена алгоритма решения регуляризированной СЛАУ (1) для нахождения φ_α с преобразованием к треугольному виду - алгоритмом псевдообращения матрицы системы с использованием SVD-разложения;
- обобщение классического ЕС-алгоритма со скалярным параметром глобальной регуляризации на векторный вариант (отличительный момент), – когда α становится вектором (локальная регуляризация) соответствующей размерности с различными компонентами.

В первых двух вариантах мы получаем более экономные и быстродействующие алгоритмы, упрощаем процесс создания программного обеспечения, а также имеем возможность контроля устойчивости решений.

В последнем случае предложен новый оригинальный вариант регуляризации, когда найденное оптимальное значение α^* служит масштабным множителем для задания равномерно распределенной случайной величины на отрезке [0,1] – функции rand.

В результате получается упорядоченный по убыванию компонент случайный вектор параметров регуляризации, максимальная проекция которого приблизительно равна (но не превосходит) α^*. Далее этот вектор подставляется в (1) (где произведена матричная «рокировка» α и E) для нахождения стохастически регуляризированного решения φ_α^* и производится вычисление величины эмпирического риска на полученном решении

(2) $$I_э = \frac{1}{l}\left\|y - R\varphi_\alpha^*\right\|^2.$$

Минимизация (2) определяет наиболее корректное решение в рамках векторной регуляризации стохастического РА.

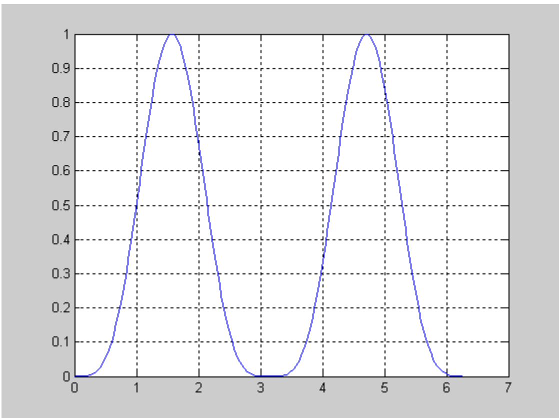
Для верификации работы ЕС-алгоритма и программ регуляризации выполнены решения СЛАУ с прямоугольными матрицами повышенной размерности. Максимальный размер матриц равнялся (310×190). В качестве теста исследовано решение интегрального уравнения по искаженным случайной помехой замерам правой части [7].

Алгебраизация интегрального уравнения приводит к системе с числом уравнений $M = 210$, числом неизвестных $K = 126$. Элементы матрицы вычислялись по формуле

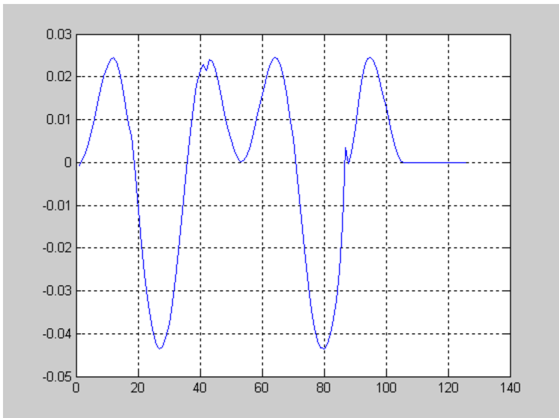
$$A(I,J) = [0.164\cdot(I-1) - 0.328\cdot(J-1)]_+;$$
$$I = 1,\dots,210; \qquad J = 1,\dots,126;$$
$$[\dots]_+ = \{x, x \geq 0;\ 0, x < 0\}.$$

Все ненулевые элементы матрицы лежат ниже главной «квази-диагонали», матрица A предельно плохо обусловлена, rank(A) = 105, cond_A = Inf (бесконечно большое число в MATLAB).

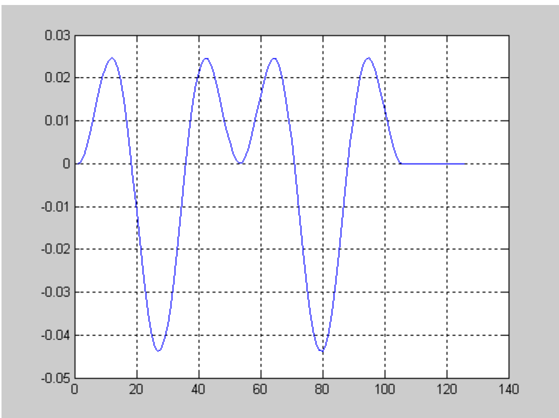
Некоторые результаты решения СЛАУ с матрицей A (210x126) показаны рис. 1.



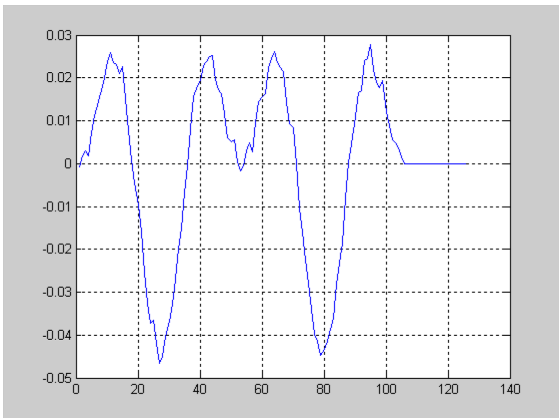
а)



в)



б)



г)

Рис.1. Верификация ЕС-алгоритма регуляризации решений СЛАУ с матрицей А (210×126): а) график компонент невозмущенного вектора правой части Y ; б) график решения СЛАУ в отсутствии возмущения Y ; в) решение при детерминированном возмущении трех проекций Y; г) решение при случайном возмущении всех проекций Y (нормальный закон распределения помехи с нулевым средним и с.к.о., равным 0.001).

Отметим, что для варианта а) оптимальный параметр регуляризации $\alpha = 0.005$, невязка при оптимальном параметре регуляризации d = 4.2549e–005. В варианте в) уровень возмущения трех проекций ~ 7 %, $\alpha = 0.50$, d = 0.0024; для г) $\alpha = 0.05$, d = 1.6027e–004. Время вычисления регуляризированного решения в каждом случае не более 1.5 с. Реализованный РА вычисляет достаточно гладкие, устойчивые решения алгебраических систем практически в режиме реального времени.

3. Заключение

Классический ЕС- метод регуляризации модифицирован и реализован в пакете MATLAB, апробирован на тестовых задачах относительно большой размерности (матрицы в несколько сот строк и столбцов).

1) Показано, что для получения устойчивых решений при минимизации базовых функционалов (на этапе решения СЛАУ) требуется регуляризация алгоритма.
2) Предложена и обоснована регуляризация базового метода идентификации плотностей распределения на основе ЕС-алгоритма.
3) Классический ЕС-алгоритм развит в рамках оригинальной авторской методики на случай векторной регуляризации.
4) Вычислительные эксперименты по решению СЛАУ с матрицами, имеющими число обусловленности 10^6 и более, подтвердили эффективность алгоритмов регуляризации.

Предложенный подход важен также для развития ЕС- алгоритма при локальной регуляризации в условиях задания априорной информации о виде идентифицируемого закона распределения и его структурных особенностей [8].

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 19-07-00926_а.

Список литературы

1. Пупков К.А. Вероятностная неопределенность в стохастических технических системах управления. // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 10.
2. Трояновский В.М. Анализ и параметрический синтез стохастических систем управления: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.01. М., 2008.
3. Куликов В.Б. Идентификация одномерных многомодальных плотностей распределения вероятности при ограниченном объеме данных методом регуляризации // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2013. № 3(72). С. 7-11.
4. Куликов В.Б. Восстановление полимодальных плотностей вероятности по экспериментальным данным в структурах со стохастическими свойствами // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2014. № 1(1). С. 248-256.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
6. Hoerl A.E., Kennard R.W. Ridge regression: biased estimation for non-orthogonal problems // Technometrics. 1970. Vol. 12. P. 55-67.
7. Вапник В.Н. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей. М.: Наука, 1984. 816 с.

8. Воскобойников Ю.В., Мицель А.А. Современные проблемы прикладной математики. Часть 1. Лекционный курс. Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР). Томск, 2015. 136 с.