УДК 517.977

СУБОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗИРУЮЩАЯ СТРАТЕГИЯ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С УПРАВЛЯЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Е.Е. Онегин

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: evgeny.onegin@phystech.edu

М.М. Хрусталев

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: mmkhrustalev@mail.ru

Ключевые слова: линейная система, оптимальная стабилизация, программное управление, система с управляемыми параметрами, информационные ограничения.

Аннотация: В данной работе предложен алгоритм синтеза субоптимального программного управления на неограниченном интервале времени линейной стохастической системой с мультипликативными возмущениями и управляемыми параметрами. Рассматриваемая система представляет из себя линейную стохастическую систему с мультипликативными возмущениями, матрицы которой зависят (в том числе и нелинейно) от оптимизируемых управляемых параметров. Результат работы полученного алгоритма демонстрируется на модельном примере. Полученные результаты могут быть применены к задаче оптимальной стабилизации линейных стохастических систем с информационными ограничениями.

1. Введение

Важной задачей оптимизации стохастических систем является задача оптимальной стабилизации при наличии информационных ограничений. Информационные ограничения накладываются на вид обратной связи между объектом и управляющим устройством, и их сущность заключается в рассмотрении только тех управлений, каждая компонента которых зависит от своего, заранее заданного набора компонент состояния [1]. Распространенным подходом решения задачи оптимального управления при неполной информации о векторе состояния системы является разделение задачи на задачу фильтрации и задачу оптимального управления по восстановленному вектору состояния. Однако, такой подход не применим в ситуациях, когда по различным причинам практическая реализация фильтра невозможна. В подобных случаях представляет интерес синтез марковской стратегии управления системой.

При рассмотрении линейных систем в первую очередь речь идёт о построении оптимального линейного регулятора.

В данной работе рассматривается задача оптимальной стабилизации линейной системы с управляемыми параметрами, которая является естественным обобщением задачи поиска оптимального стабилизирующего линейного регулятора. Используемый подход позволяет учитывать различные информационные и другие структурные ограничения на управление. Предложен алгоритм синтеза субоптимального кусочно-постоянного программного управления. Результат работы алгоритма продемонстрирован на модельном примере.

2. Постановка задачи

Рассматриваемая система описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито вида

$$dX(t) = A_0(u(t))X(t)dt + \sum_{i=1}^{k} A_i(u(t))X(t)\,dW_i(t), \quad X(0) = X_0, \tag{1}$$

где $t \geqslant 0$ – время; X – случайный процесс в $\mathcal{R}^n$; W – стандартный винеровский процесс в $\mathcal{R}^k$; $u : [0, +\infty) \to \mathcal{R}^m$ – оптимизируемая стратегия управления; $A_i : \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^{n\times n}$, $i = \overline{0,k}$ – непрерывно дифференцируемые матричнозначные функции, X_0 – случайный вектор, который не зависит от $W(t)$, $t \geqslant 0$, и удовлетворяет условию $\mathbb{E}\|X_0\|^2 < +\infty$, где $\|x\|$ – евклидова норма вектора $x \in \mathcal{R}^n$, $\mathbb{E}$ – оператор математического ожидания.

Обозначим через $\mathcal{D}$ множество допустимых процессов управления $z = (X, u)$, которые являются парами случайных процессов X и управлений u таких, что

1. При заданном программном управлении u непрерывный случайный процесс X является решением уравнения (1) с заданным начальным условием.
2. Выполнено неравенство $\mathbb{E} \int\limits_0^{+\infty} \|X(s)\|^2 ds < +\infty$.

Если $z = (X, u) \in \mathcal{D}$, то стратегию u будем называть стабилизирующей.

Определим на множестве $\mathcal{D}$ функционал качества управления $J : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$

$$J(z) = \mathbb{E} \int_{t_0}^{+\infty} X(s)^T Q(u(s)) X(s) ds, \tag{2}$$

где $Q : \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^{n\times n}$ – непрерывно дифференцируемая матричнозначная функция, которая определена на всем принимает значения из множества неотрицательно определенных симметрических матриц, $Q(u) \succcurlyeq 0$, $u \in \mathcal{R}^m$.

Задача оптимальной стабилизации системы (1) состоит в поиске такого программного управления $\overline{u}$, что процесс управления $\overline{z} = (\overline{X}, \overline{u})$, $\overline{z} \in \mathcal{D}$, минимизирует критерий (2) на множестве $\mathcal{D}$

$$J(\overline{z}) = \min_{z\in\mathcal{D}} J(z). \tag{3}$$

При этом управление $\overline{u}$ будем называть оптимальным.

3. Оптимальный стабилизирующий вектор

Ранее в работе [2] были получены необходимые условия для оптимального стабилизирующего вектора параметров. В контексте рассматриваемой задачи упомянутые условия представляют из себя необходимые условия оптимальности постоянной программной стратегии управления.

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $H : \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^{n\times n} \to \mathcal{R}^{n\times n}$

$$H(u, M) := MA_0(u) + A_0(u)^T M + \sum_{i=1}^{k} A_i(u)^T M A_i(u) + Q(u).$$

Теорема 1 (необходимые условия оптимальности стабилизирующего вектора)**.** *Если стабилизирующий вектор $\overline{u} \in \mathcal{R}^m$ является оптимальным в классе постоянных программных стратегий управления в задаче (1)–(3), то выполнены равенства*

$$\operatorname{tr}\Big[\frac{\partial H(u,\overline{M})}{\partial u_i}\Big|_{u=\overline{u}} \overline{F}\Big] = 0,\ \ i = \overline{1,m}, \tag{4}$$

где неотрицательно определенные симметрические матрицы $\overline{M} \in \mathcal{R}^{n\times n}$ и $\overline{F} \in \mathcal{R}^{n\times n}$ — решения линейных матричных уравнений

$$\overline{M}A_0(\overline{u}) + A_0(\overline{u})^T\overline{M} + \sum_{i=1}^{k} A_i(\overline{u})^T\overline{M}A_i(\overline{u}) = -Q(\overline{u}), \tag{5}$$

$$\overline{F}A_0(\overline{u})^T + A_0(\overline{u})\overline{F} + \sum_{i=1}^{k} A_i(\overline{u})\overline{F}A_i(\overline{u})^T = -K_0, \tag{6}$$

где $K_0 \in \mathcal{R}^{n\times n}$ — матрица вторых начальных моментов случайного вектора X_0.

4. Субоптимальное программное управление

Из приведённых выше условий легко видеть, что оптимальный стабилизирующий вектор зависит от матрицы вторых начальных моментов случайного вектора X_0. Пусть нам известен оптимальный вектор $u_0 \in \mathcal{R}^m$. Зафиксируем некоторый момент времени $t_1 > 0$ и, используя уравнения (4)–(6), найдём новый оптимальный вектор $u_1 \in \mathcal{R}^m$ с новым начальным условием. Для определения новых начальных условий, воспользуемся известными уравнениями для вторых начальных моментов (например, [3]). С учётом того, что матрицы системы и критерия явно не зависят от времени, из теоремы 1 следует, что вектор u_1 на интервале времени $[t_1, +\infty)$ даст значение критерия не хуже, чем u_0. Таким образом мы приходим к следующей итерационной процедуре синтеза субоптимального программного управления в задаче (1)–(3).

Алгоритм 1. *1. Задать разбиение $t_0, t_1, \ldots, t_n$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, полуинтервала $[0, +\infty)$.*
2. Из уравнений (4)–(6) последовательно вычислить оптимальные стабилизирующие векторы u_i, $i = \overline{0,n}$ на интервалах времени $[t_i, +\infty), i = \overline{0,n}$.

3. Результатом будет программное управление следующей структуры

$$u(t) = \begin{cases} u_0, \ t_0 \leqslant t < t_1, \\ u_1, \ t_1 \leqslant t < t_2, \\ \dots \\ u_n, \ t_n \leqslant t < +\infty. \end{cases}$$

5. Модельный пример

Продемонстрируем полученные результаты на примере задачи оптимальной стабилизации линейной стационарной системы с мультипликативными возмущениями. Пусть

$$\begin{aligned} &dX_1(t) = -X_1(t)dt + (0.5 \ X_1(t) + 0.1 \ u(t, X(t)))dW(t), \\ &dX_2(t) = (0.001 \ X_2(t) + u(t, X(t)))dt, \\ &X(0) = (10, \ 10)^T, \\ &J(z) = \mathbb{E} \int\limits_0^{+\infty} \Big(100 \ X_1^2(s) + 0.1 \ X_2^2(s) + u(s, X_1(s), X_2(s))^2\Big) ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим три класса допустимых стратегий управления:

1. Класс линейных регуляторов с полной обратной связью
$$u_1(t,x) = -L_1(t)x, \ L_1(t) \in \mathcal{R}^{1\times 2}.$$
2. Класс линейных стационарных регуляторов, удовлетворяющих информационному ограничению,
$$u_2(t,x) = -L_2 x_2, \ L_2 \in \mathcal{R}.$$
3. Класс линейных нестационарных регуляторов, удовлетворяющих информационному ограничению,
$$u_3(t,x) = -L_3(t) x_2, \ L_3(t) \in \mathcal{R}.$$

Известно [3], что в первом случае решением задачи оптимальной стабилизации будет линейный стационарный регулятор. Используя известные результаты, численно найдены матрица L_1 оптимального регулятора и оптимальное значение критерия J_1

$$L_1 = [1.41959 \ 0.25471], \quad J_1 = 5462.4960.$$

Во втором случае задача сводится к задаче оптимизации скалярного параметра L_2 и может быть решена при помощи теоремы 1. Оптимальный коэффициент регулятора и оптимальное значение критерия в этом случае равны

$$L_2 = -1.72575, \quad J_2 = 5490.9374.$$

Легко видеть, что при наложении структурного ограничения на матрицу регулятора, оптимальное значение критерия увеличилось. Теперь продемонстрируем работы предложенного алгоритма. Для простоты положим, что разбиение интервала времени состоит из точек $0 = t_0 < t_1 = 1$. Следуя алгоритму (1), численно найден следующий кусочно-постоянный коэффициент матрицы регулятора и соответствующее значение критерия

$$L_3(t) = \begin{cases} -1.72575, \ 0 \leqslant t < 1, \\ -2.91044, \ 1 \leqslant t < +\infty, \end{cases} \quad , \quad J_3 = 5489.68468.$$

Таким образом, даже разбиение из двух интервалов позволило улучшить значение критерия. Кроме этого, здесь демонстрируется интересный факт: линейный стационарный регулятор, вообще говоря, не является оптимальным в задаче с информационными ограничениями.

Список литературы

1. Хрусталев М.М., Румянцев Д.С., Царьков К.А. Оптимизация квазилинейных стохастических систем, нелинейных по управлению // Автоматика и телемеханика. 2017. № 6. С. 84-105.
2. Onegin E., Khrustalev M. Optimal stabilisation of a quasilinear stochastic system with controllable parameters // Proceedings of 2018 14th International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) STAB 2018. Moscow, Russia, 2018. IEEE, 2018. https://ieeexplore.ieee.org/document/8408384.
3. Damm T. Rational Matrix Equations in Stochastic Control. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014.