

ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕКУРРЕНТНЫЙ ЛОГИКО-ДИНАМИЧЕСКИЙ ФИЛЬТР БОЛЬШОГО ПОРЯДКА, КРАТНОГО РАЗМЕРНОСТИ ВЕКТОРА ОЦЕНКИ

Е.А. Руденко

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Россия, 125871, Москва, Волоколамское ш., 4

E-mail: rudenkoevg@yandex.ru

Ключевые слова: переключаемая система наблюдения, смешанная марковская последовательность, неточные измерения, оптимальная нелинейная фильтрация.

Аннотация: рассматривается задача оценивания текущего состояния и режима работы дискретного стохастического динамического переключаемого объекта управления по результатам неточных или неполных измерений. Для создания алгоритма оценивания, реализуемого в темпе со временем на вычислителе ограниченной мощности, предлагается способ синтеза нового конечномерного фильтра. Вектор его состояния составляется из нескольких последних векторов оценки, а текущая оценка ищется в виде оптимальной по точности зависимости от последнего измерения и предыдущего состояния фильтра.

1. Введение

Оптимальное управление стохастическими логико-динамическими системами (многорежимными, переключаемыми, со случайной структурой) по их измеряемым выходам требует оперативного, в реальном масштабе времени, распознавания текущего режима работы и оценивания внутривремени состояния этих систем. Но применение для этого бесконечномерного *абсолютно-оптимального фильтра* (АОФ) [1-3] сопряжено с существенными вычислительными трудностями, а конечномерный условно-оптимальный фильтр [4] является параметрическим и имеет небольшой фиксированный порядок (размерность вектора состояния), что препятствует получению им значительной точности. Потенциальная точность конечномерных непараметрических *фильтров оптимальной структуры* (ФОС) также ограничена, ибо они имеют или бесконечное время памяти и малый порядок, равный порядку объекта наблюдения [5-7], или любой порядок, кратный размерности вектора измерений, но конечную память [8].

В настоящей работе предлагается способ преодоления этой ограниченности логико-динамического оцениваемого вектора состояния системы наблюдения. Время памяти ФБП бесконечно, а противоречие между его точностью и сложностью регулируется выбором величины кратности. Нахождение структурных функций ФБП выполняется до начала процесса оценивания с помощью интегральных операций с плотностями вероятности, что можно реализовать численно методом Монте-Карло с построением гистограмм искомых функций.

2. Постановка задачи синтеза фильтра

Рассмотрим функционирующий в условиях неопределенности многорежимный объект, случайное поведение которого в каждый момент дискретного времени $k = \overline{0, K}$ с конечным горизонтом K определяется одним из L целочисленных номеров его режима (структуры) $I_k \in \overline{\{1, L\}}$ и вектором абсолютно непрерывных континуальных переменных его состояния $X_k \in \mathbb{R}^{n_x}$. Пусть изменение во времени расширенного вектора состояния объекта $\bar{X}_k = [I_k \ X_k^T]^T$ описывается следующей системой уравнений

$$(1) \quad \bar{X}_{k+1} \equiv \begin{bmatrix} I_{k+1} \\ X_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_k^{(I_k)}(X_k, V_k^\square) \\ a_k^{(I_k)}(X_k, V_k) \end{bmatrix} \equiv \bar{a}_k(\bar{X}_k, \bar{V}_k), \quad \bar{X}_0 \equiv \begin{bmatrix} I_0 \\ X_0 \end{bmatrix} \sim p_0(i, x) \equiv p_0(\bar{x}).$$

Здесь $\phi_k^{(i)}(x, v^\square) \equiv \phi_k(i, x, v^\square)$, $a_k^{(i)}(x, v) \equiv a_k(i, x, v)$ – известные скалярная и векторная функции логического и динамического блоков объекта соответственно, $\bar{V}_k = (V_k^\square, V_k)$ – вектор дискретных белых возмущений этих блоков. Эти возмущения не зависят от начального состояния объекта (I_0, X_0) , который определяется своим совместным распределением $p_0(i, x) = P_0^{(i)} p_0^{(i)}(x)$, где $P_0^{(i)} = \text{Pr}[I_0 = i]$ – вероятность номера режима I_0 , $p_0^{(i)}(x) = p_0(x | I_0 = i)$ – условная плотность вероятности вектора состояния X_0 .

Пусть также для уточнения текущего состояния \bar{X}_k фиксируется расширенный вектор наблюдений $\bar{Y}_k = [J_k \ Y_k^T]^T$, состоящий из целочисленной переменной индикации режима $J_k \in \overline{\{1, M\}}$ и вектора $Y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ абсолютно непрерывных континуальных измерений, причем их значения определяются по формулам

$$(2) \quad \bar{Y}_k \equiv \begin{bmatrix} J_k \\ Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o_k^{(I_k)}(X_k, W_k^\square) \\ b_k^{(I_k)}(X_k, W_k) \end{bmatrix} \equiv \bar{b}_k(\bar{X}_k, \bar{W}_k).$$

Здесь $o_k^{(i)}(x, w^\square)$, $b_k^{(i)}(x, w)$ – известные функции блоков измерителя, $\bar{W}_k = (W_k^\square, W_k)$ – вектор дискретных белых погрешностей измерений, не зависящий ни от \bar{X}_0 , ни от \bar{V}_k .

Априорное вероятностное поведение системы наблюдения (1), (2) полностью описывается определяемым по ее уравнениям и законам распределения белых шумов \bar{V}_k , \bar{W}_k условным распределением $\alpha_k(i_{k+1}, x_{k+1} | i_k, x_k)$ перехода от старого состояния \bar{X}_k к новому \bar{X}_{k+1} и условным распределением $\beta_k(j_k, y_k | i_k, x_k)$ измерения \bar{Y}_k [5–8].

Требуется, с целью увеличения точности легко реализуемого в реальном времени логико-динамического *ФОС малого порядка* (ФМП) [5–7], найти оптимальную оценку $\hat{X}_k = [\hat{I}_k \ \hat{X}_k^T]^T$ состояния $\bar{X}_k = [I_k \ X_k^T]^T$ как функцию последнего измерения \bar{Y}_k и не более чем $l \in \mathbb{N}$ предыдущих оценок

$$(3) \quad \hat{X}_k = \bar{g}_k(\bar{Y}_k, \hat{X}_{\max(0, k-l)}^{k-1}), \quad k \geq 1, \quad \hat{X}_0 = \bar{g}_0(\bar{Y}_0).$$

Условием ее оптимальности является минимум среднего значения функции потерь от неточного распознавания и оценивания, например, аддитивной квадратично-простой

$$(4) \quad \mathbb{M} \left[(X_k - \hat{X}_k)^T C_k (X_k - \hat{X}_k) + (1 - \delta_{I_k, \hat{I}_k}) \right] \rightarrow \min_{\bar{g}_k(\cdot)}, \quad k \geq 0,$$

где \mathbb{M} – оператор математического ожидания, $C_k = C_k^T > 0$ – матрица весовых коэффициентов, $\delta_{i,l}$ – символ Кронекера.

В отличие от *фильтра с конечной памятью* (ФКП) [8] старые измерения в (3) не забываются, они аккумулируются в оценках, поэтому время памяти ФБП как динамической системы бесконечно. При этом ФМП является частным случаем ФБП при $l = 1$.

3. Рекуррентность и порядок предлагаемого фильтра

Соберем l последних оценок в вектор растущей, вначале, размерности

$$\bar{Z}_k = \hat{X}_{\max(0, k-l+1)}^k = \begin{cases} \hat{X}_0^k, & k = 0..(l-1) \text{ (этап накопления),} \\ \hat{X}_{k-l+1}^k, & k \geq l \text{ (этап обновления).} \end{cases}$$

Тогда искомое соотношение (3) принимает вид

$$(5) \quad \hat{X}_k = \begin{bmatrix} \hat{I}_k \\ \hat{X}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \iota_k(\bar{Y}_k, \bar{Z}_{k-1}) \\ g_k(\bar{Y}_k, \bar{Z}_{k-1}) \end{bmatrix} = \bar{g}_k(\bar{Y}_k, \bar{Z}_{k-1}), \quad k \geq 1, \quad \hat{X}_0 = \begin{bmatrix} \hat{I}_0 \\ \hat{X}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \iota_0(\bar{Y}_0) \\ g_0(\bar{Y}_0) \end{bmatrix},$$

а заполнение вектора учитываемых оценок \bar{Z}_k можно записать рекуррентно

$$(6) \quad \bar{Z}_k = \bar{f}_k(\hat{X}_k, \bar{Z}_{k-1}), \quad k \geq 1, \quad \bar{Z}_0 = \hat{X}_0.$$

Действительно, выделяя в \bar{Z}_k целочисленную $N_k = \hat{I}_{\max(0, k-l+1)}^k$ и континуальную $Z_k = \hat{X}_{\max(0, k-l+1)}^k$ компоненты, имеем

$$\bar{Z}_k = \begin{bmatrix} N_k \\ Z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_k(\hat{I}_k, N_{k-1}) \\ f_k(\hat{X}_k, Z_{k-1}) \end{bmatrix} = \bar{f}_k(\hat{X}_k, \bar{Z}_{k-1}), \quad k \geq 1,$$

где $\Phi_k(\cdot)$, $f_k(\cdot)$ – следующие вектор-функции накопления-обновления этих компонент

$$\Phi_k(\hat{I}_k, n_{k-1}) = \begin{cases} [\hat{I}_k \quad n_{k-1}^\top]^\top, & k = 1..(l-1), \\ [\hat{I}_k \quad (C_u n_{k-1})^\top]^\top, & k \geq l, \end{cases} \quad C_n = [E_{l-1} \quad O_{(l-1) \times 1}],$$

$$f_k(\hat{x}_k, z_{k-1}) = \begin{cases} [\hat{x}_k^\top \quad z_{k-1}^\top]^\top, & k = 1..(l-1), \\ [\hat{x}_k^\top \quad (C_z z_{k-1})^\top]^\top, & k \geq l, \end{cases} \quad C_z = [E_{(l-1)n_x} \quad O_{(l-1)n_x \times n_x}].$$

Здесь C_n , C_z – матрицы удаления из векторов N_{k-1} и Z_{k-1} их последних, устаревших, блоков \hat{I}_{k-l} и \hat{X}_{k-l} соответственно, E , O – единичная и нулевая матрицы.

В результате разностный вид уравнений (6) позволяет называть \bar{Z}_k вектором состояния этого рекуррентного фильтра, его размерность (порядок фильтра) не превосходит величины $p = l(n_x + 1)$, функции уравнения его состояния фиксированы, а оптимизации по критерию (4) подлежат только функции $\iota_k(\cdot)$, $g_k(\cdot)$ формулы его выхода (5).

Отметим, что уравнения ФБП (5), (6) отличаются от уравнений ФКП [8] только наполнением вектора состояния: $\bar{Z}_k^{\text{ФБП}} = \hat{X}_{\max(0, k-l+1)}^k$, тогда как $\bar{Z}_k^{\text{ФКП}} = \bar{Y}_{\max(0, k-l+1)}^k$.

4. Оптимизация функций выхода фильтра

Подставляя формулы для оценок (5) в критерий (4), известным образом [8] получаем следующие оптимали

$$(7) \quad \iota_k(\bar{z}_k^*) \in \text{Arg max}_{i=1..L} P_k^{(i)}(\bar{z}_k^*), \quad g_k(\bar{z}_k^*) = \sum_{i=1}^L P_k^{(i)}(\bar{z}_k^*) \int x \rho_k^{(i)}(x | \bar{z}_k^*) dx, \quad k \geq 1.$$

Здесь и далее все интегралы являются определенными и берутся по всему евклидову пространству соответствующей размерности, $\bar{z}_k^* = (\bar{y}_k, \bar{z}_{k-1})$ – объединенный аргумент, $P_k^{(i)}(\bar{z}_k^*)$ – условная вероятность i -го режима, $\rho_k^{(i)}(\cdot)$ – условная плотность вероятности состояния X_k при истинности i -го режима. Последние выражаются через условное распределение $\rho_k(\bar{x}_k | \bar{y}_k, \bar{z}_{k-1})$ расширенного вектора состояния \bar{X}_k объекта (1)

$$P_k^{(i)}(\bar{y}_k, \bar{z}_{k-1}) = \Pr[I_k = i | \bar{Y}_k = \bar{y}_k, \bar{Z}_{k-1} = \bar{z}_{k-1}] = \int \rho_k(i, x_k | \bar{y}_k, \bar{z}_{k-1}) dx_k,$$

$$\rho_k^{(i)}(x_k | \bar{y}_k, \bar{z}_{k-1}) = \rho_k(i, x_k | \bar{y}_k, \bar{z}_{k-1}) / P_k^{(i)}(\bar{y}_k, \bar{z}_{k-1}).$$

Таким образом, задача сведена к определению условного распределения вероятности $\rho_k(\cdot)$. При этом начальные функции $\iota_0(\cdot)$, $g_0(\cdot)$ и соответствующие им оценки \hat{I}_0, \hat{X}_0 совпадают с абсолютно-оптимальными [1,2,7].

5. Нахождение условного распределения

Используя формулу Байеса, а также свойства марковости объекта (1) и измерителя (2), аналогично [8] можно получить следующие выражения. Условное распределение $\rho_k(\cdot)$ выражается через совместное распределение $q_{k-1}(\cdot)$ по формулам

$$\rho_k(i, x | j_k, y_k, \bar{z}_{k-1}) = \beta_k(j_k, y_k | i, x) \pi_k(i, x | \bar{z}_{k-1}) / \sum_{i=1}^L \int \text{numerator} dx, \quad k \geq 1,$$

$$\pi_{k+1}(i_{k+1}, x_{k+1} | \bar{z}_k) = \sum_{i_k=1}^L \int \alpha_k(i_{k+1}, x_{k+1} | i_k, x_k) \frac{q_k(i_k, x_k, \bar{z}_k)}{\sum_{i_k=1}^L \int \text{numerator} dx_k}, \quad k \geq 0,$$

а $q_k(\cdot)$ находится рекуррентно с ними, используя уже полученные по $\rho_k(\cdot)$ функции (7). Сначала, по известным $\iota_0(\cdot)$, $g_0(\cdot)$, вычисляются вспомогательные распределения

$$r_1(i_1, x_1 | j_0, y_0) = \sum_{i_0=1}^L \int \alpha_0(i_1, x_1 | i_0, x_0) \beta_0(j_0, y_0 | i_0, x_0) p_0(i_0, x_0) dx_0,$$

$$p_1(i_1, x_1, \hat{i}_0, \hat{x}_0) = \sum_{j_0=1}^M \int \delta_{i_0, \iota_0(j_0, y_0)} \delta[\hat{x}_0 - g_0(j_0, y_0)] r_1(i_1, x_1 | j_0, y_0) dy_0.$$

После, на этапе накопления оценок, при $k = 1..(l-1)$, отыскиваются $q_1(\cdot)$, ..., $q_{l-1}(\cdot)$:

$$q_k(i_k, x_k, \hat{x}_0^k) = p_k(i_k, x_k, \hat{x}_0^{k-1}) \int \delta[\hat{x}_k - \bar{g}_k(\bar{y}_k, \hat{x}_0^{k-1})] \beta_k(\bar{y}_k | i_k, x_k) d\bar{y}_k,$$

$$(8) \quad p_{k+1}(i_{k+1}, x_{k+1}, \bar{z}_k) = \sum_{i_k=1}^L \int \alpha_k(i_{k+1}, x_{k+1} | i_k, x_k) q_k(i_k, x_k, \bar{z}_k) dx_k, \quad k \geq 1.$$

Здесь для компактности записи использованы следующие условные обозначения

$$\delta[\hat{x}_k - \bar{g}_k(\cdot)] = \delta_{i_k - \iota_k(\cdot)} \delta[\hat{x}_k - g_k(\cdot)], \quad \int f(\bar{y}_k) d\bar{y}_k = \sum_{j_k=1}^M \int f(j_k, y_k) dy_k.$$

Затем, на последующем этапе обновления оценок, при $k \geq l$, еще $q_l(\cdot)$, $q_{l+1}(\cdot)$ и т.д.:

$$q_k(\bar{x}_k, \hat{x}_{k-l+1}^k) = \iint \delta[\hat{x}_k - \bar{g}_k(\bar{y}_k, \hat{x}_{k-l}^{k-1})] \beta_k(\bar{y}_k | \bar{x}_k) p_k(\bar{x}_k, \hat{x}_{k-l}^{k-1}) d\bar{y}_k d\hat{x}_{k-l}^k,$$

где также используется общая формула (8), а «интегрирование» по \hat{x}_{k-l}^k соответствует удалению из вектора $\bar{Z}_{k-1} = \hat{X}_{k-l}^{k-1}$ его «старого» блока \hat{X}_{k-l}^k , что отражает процесс потери информации о самых старых оценках.

6. Заключение

Полученные интегральные соотношения можно реализовать численно методом Монте-Карло, когда последовательное нахождение вероятностных распределений заменяется потактовым статистическим моделированием уравнений объекта (1), измерителя (2) и фильтра (3) [7,8]. Его целью является получения больших пакетов реализаций случайных величин $\{\bar{X}_k\}$, $\{\bar{Y}_k\}$, $\{\bar{Z}_{k-1}\}$, позволяющих строить гистограммы оптимальных функций оценивания (7). Одновременно с этим анализируется и точность фильтра. Однако такая процедура синтеза ФБП довольно громоздка.

Поэтому в дальнейшем актуально построение различных численно-аналитических приближений к ФБП (линеаризованного, гауссовского, сигма-точечного и т.п.), подобных аналогичным приближениям к ФМП [6-8] и к ФКП [9], для чего и будут использованы найденные здесь соотношения. В этих приближениях вид структурных функций (7) находится уже аналитически, а их параметры тоже вычисляются методом Монте-Карло, но уже гораздо проще, лишь по выборочным значениям двух первых моментов непрерывных переменных X_k , Z_k и по совместной вероятности целочисленных переменных I_k , N_k . Подчеркнем, что все эти вычисления можно произвести заранее, до начала самого процесса оценивания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-08-00128-а).

Список литературы

1. Немура А., Клекис Э. Оценивание параметров и состояния систем со скачкообразно меняющимися свойствами. Вильнюс: Мокслас, 1988.
2. Бухалев В.А. Распознавание, оценивание и управление в системах со случайной скачкообразной структурой. М.: Наука, 1996.
3. Bain A., Crisan D. Fundamentals of Stochastic Filtering. New York: Springer, 2009.
4. Босов А.В., Панков А.Р. Условно-минимаксная фильтрация в системе с переключающимися каналами наблюдения // Автоматика и телемеханика. 1995. № 6. С. 87-97.
5. Руденко Е.А. Оптимальный дискретный логико-динамический нелинейный фильтр-предиктор // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 3. С. 28-38.
6. Руденко Е.А. Численно-аналитические приближения к оптимальному рекуррентному логико-динамическому фильтру-предиктору малого порядка // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 5. С. 24-47.
7. Руденко Е.А. Конечномерные рекуррентные алгоритмы оптимальной логико-динамической фильтрации // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 1. С. 43-65.
8. Руденко Е.А. Оптимальный рекуррентный логико-динамический фильтр с конечной памятью // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 4. С. 56-64.
9. Руденко Е.А. Оптимальный дискретный логико-динамический фильтр-предиктор с конечной памятью // Тр. XI Межд. Четаевской конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление». Т. 3. Секция 3. Управление. Ч. III. Казань, 13–17 июня 2017 г. Казань: КНИТУ-КАИ, 2017. С. 221-231.