

УДК 681.516.74 : 681.5.015.44

ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЙ МЕТОД ОШИБКИ ПРОГНОЗА СОСТОЯНИЯ ДЛЯ АДАПТИВНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

И.В. Семушин

Ульяновский государственный университет
Россия, 432000, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42
E-mail: I.V.SemushinRF@ieee.org

Ключевые слова: адаптивное управление, активный принцип адаптации, наилучшая линейная аппроксимация, фильтр Калмана, параметрическая идентификация, физически-структурированное описание.

Аннотация: Данная работа демонстрирует метод и условия, при которых возможно строить инструментальный функционал качества идентификации оптимального фильтра Калмана (ОФК) в терминах различных линейных описаний системы для задач адаптивного стохастического управления в условиях априорной неопределенности. Решаются вопросы идентифицируемости ОФК с точностью *до невырожденного преобразования подобия* и возможности снятия этого ограничения по точности.

1. Введение

Цель параметрической идентификации данной реальной системы \mathfrak{S} заключается в том, чтобы отыскать для нее наилучшую модель $\mathfrak{M} \triangleq \mathfrak{M}(\theta)$ в некотором заранее выбранном классе моделей $\{\mathfrak{M} \triangleq \mathfrak{M}(\theta)\}$, характеризуемых параметром θ . Этот класс образуется тогда, когда θ пробегает возможные значения в заданном компактном множестве Θ вещественнозначного пространства: $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$. Важно знать, какой смысл вложен в термин *наилучшая модель*. Тем самым определяется принцип идентификации.

Классическим общепризнан принцип *Минимума ошибки предсказания* (Minimum Prediction Error, МРЕ) [1]. По умолчанию, с этим названием подразумевают ошибку предсказания выхода, т. е. реакции системы на управляющий вход. Вход $u(t)$ и выход $y(t)$ – единственно доступные данные, хотя для лучшего качества была бы предпочтительна подгонка адаптивной модели $\overline{\mathfrak{M}}(\theta)$ к системе \mathfrak{S} по критерию близости друг другу не внешних реакций модели $\overline{\mathfrak{M}}(\theta)$ и системы \mathfrak{S} на один и тот же вход, а их внутренних состояний. Это видно из фундаментальных определений: вводя понятие *динамическая система*, «нам нужно, конечно, потребовать, чтобы множество внутренних состояний системы \mathfrak{S} было достаточно богатым для того, чтобы вместить всю информацию о предыстории системы \mathfrak{S} , необходимой для предсказания влияния прошлого на будущее» [2, с. 13].

В реальной, особенно, стохастической обстановке задач управления внутреннее состояние скрыто от практического доступа. Это подобно тому, как полезный сигнал скрыт на фоне помех в задачах фильтрации: в противном случае сама задача не стояла бы. С другой стороны, состояние – это математическая абстракция, узнаваемая с точностью до невырожденного (эквивалентного) преобразования подобия. Принцип МРЕ и связанные с ним методы исходят из этой предпосылки: ошибка предсказания *состояния* системы, в силу своей недоступности, не может быть рабочей, т. е. инструментальной мерой близости модели $\bar{\mathcal{M}}(\theta)$ к системе \mathfrak{S} ; она служит лишь задачам теоретического обоснования оптимальных алгоритмов оценивания будущих состояний, но не практическим целям идентификации этих оптимальных алгоритмов по активному (критериальному) принципу самообучения или адаптации. Термин АПА (*активный принцип адаптации*) [3] означает создание и применение практического инструмента в виде некоторого *вспомогательного функционала качества*, $\text{ВФК}(\theta)$, такого, что $\min_{\theta} \text{ВФК}(\theta)$ влечет $\min_{\theta} \text{ИФК}(\theta)$, где $\text{ИФК}(\theta)$ – *исходный функционал качества*, в типичном случае – ошибка предсказания *состояния* системы в средне-квадратической норме.

Методы, которые к этому не способны, могут быть трактованы как действующие по *пассивному принципу адаптации*. Так, *метод подпространств* [4] формальный упор на *состояние динамической системы* делает, но, линейно комбинируя прошлые входо-выходные данные и будущие входы для предсказания будущих *выходов*, минимизирует (в норме Фробениуса) ошибку предсказания все-таки выходов, а не внутреннего состояния системы.

Инструмент самооптимизации (т. е. активного типа действия) может существовать лишь как *вспомогательный* (косвенный) *функционал качества*, $\text{ВФК}(\theta)$, поскольку $\text{ИФК}(\theta)$ не доступен. Свойство двух функционалов – $\text{ИФК}(\theta)$ и $\text{ВФК}(\theta)$ – достигать своих экстремумов одновременно будем называть их *эквимодалностью* (по аналогии с термином *унимодальность* в теории методов оптимизации). Пример: два функционала качества будут эквимодалны, когда $\text{ВФК}(\theta) = \text{ИФК}(\theta) + \text{const}_{\theta}$; это простейшая форма их связи, гарантирующая их эквимодалность.

Данная работа изучает метод и условия, при которых требуемый $\text{ВФК}(\theta)$ возможно строить для задач адаптивного стохастического управления в условиях априорной неопределенности параметров системы. Решаются вопросы: 1°. Каков наивысший уровень параметрической неопределенности, устранимой при $\min_{\theta} \text{ВФК}(\theta)$ в исходном (физически-мотивированном) базисе переменных состояния; 2°. Как изменится этот уровень, если допускать идентификацию ОФК в стандартном наблюдаемом базисе; и 3°. Какие выгоды или осложнения может дать переход к мультисенсорной стандартной наблюдаемой модели (МСНМ) при работе по принципу $\min_{\theta} \text{ВФК}(\theta)$.

2. Линейные аппроксимации (модели) системы \mathfrak{S}

2.1. Физически-структурированные модели $\mathfrak{S}(\theta)$ и $\mathcal{M}(\theta)$

Рассмотрим класс линейных инвариантных во времени стохастических динамических систем управления $\mathfrak{S}(\theta)$ с двумя шумами в виде белых независимых случайных (гауссовых) последовательностей $\{w_t\}$ и $\{v_t\}$, не зависящих от случайного начального состояния $x_0(\theta) \in \mathbb{R}^n$. Вещественная величина $\theta \in \Theta$ является параметром размерности p в некотором компактном множестве $\Theta \in \mathbb{R}^p$.

Считаем, что $\mathfrak{S}(\theta)$ является полностью управляемой и полностью наблюдаемой системой при любом значении $\theta \in \Theta$, не исключая некоторого специфического значения $\dot{\theta}$, которое называем «истинным», или «точным». Согласно современной точке зрения, для каждого конкретного экземпляра \mathfrak{S} в классе $\mathfrak{S}(\theta)$ существует одна линейная аппроксимация $\mathfrak{S}(\dot{\theta})$, признаваемая как наилучшая – в среднеквадратическом смысле близости ее отклика к наблюдаемому отклику системы $y(t)$ на воздействие $u(t)$ – среди всех линейных моделей $\mathfrak{S}(\theta)$ [5, с. 55]). Представим эту наилучшую модель соотношениями (1), используя нижний индекс t для дискретного времени и стандартное обозначение оператора математического ожидания $\mathbf{E}\{\cdot\}$:

$$(1) \quad \mathfrak{S}(\dot{\theta}) : \left\{ \begin{array}{l} x_{t+1} = \Phi(\dot{\theta})x_t + \Psi(\dot{\theta})u_t + \Gamma(\dot{\theta})w_t, \quad x_t \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{Z}_+ \\ y_t = H(\dot{\theta})x_t + v_t, \quad y_t \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{Z}_1 \\ \bar{x}_0(\dot{\theta}) \triangleq \mathbf{E}\{x_0(\dot{\theta})\}, \quad \Pi_0(\dot{\theta}) \triangleq \mathbf{E}\{[x_0 - \bar{x}_0(\dot{\theta})][x_0 - \bar{x}_0(\dot{\theta})]^T\} \\ \mathbf{E}\{w_t\} = 0, \quad \mathbf{E}\{w_t w_t^T\} = Q(\dot{\theta}) \geq 0, \quad \mathbf{E}\{w_t v_t^T\} = 0 \\ \mathbf{E}\{v_t\} = 0, \quad \mathbf{E}\{v_t v_t^T\} = R(\dot{\theta}) > 0. \end{array} \right.$$

В этом представлении будем понимать $\dot{\theta}$ как неизвестное «истинное» значение θ .

Замечание 1. Далее пользуемся сокращенными записями: $\dot{\Phi}$ вместо $\Phi(\dot{\theta})$, $\dot{\Psi}$ вместо $\Psi(\dot{\theta})$, $\dot{\Gamma}$ вместо $\Gamma(\dot{\theta})$, \dot{H} вместо $H(\dot{\theta})$, $\dot{\Phi}$ вместо $\Phi(\theta)$, Γ вместо $\Gamma(\theta)$, H вместо $H(\theta)$ и т. п., полагая, что такие замены не усложняют изложение.

Замечание 2. Все употребляемые ниже $(m \times n)$ -матрицы наблюдаемости

$$(2) \quad W(H, \Phi) = \left[H^T \mid \Phi^T H^T \mid \dots \mid (\Phi^{n-1})^T H^T \right]^T \triangleq W(\theta)$$

обладают свойством полноты ранга: $\forall \theta \in \Theta : \text{rank}\{W(H, \Phi)\} = n$, поэтому

$$W^+(H, \Phi) = [W(H, \Phi)^T W(H, \Phi)]^{-1} W(H, \Phi)^T \triangleq W^+(\theta).$$

Кроме исходного физически-структурированного представления (1), существует инновационное представление (3), известное как оптимальный фильтр Калмана:

$$(3) \quad \mathfrak{M}(\dot{\theta}) : \left\{ \begin{array}{l} x_{t+1|t} = \dot{\Phi}x_{t|t} = \dot{\Phi}x_{t|t-1} + \dot{\Psi}u_t + \dot{G}_t \dot{r}_t, \quad \dot{G}_t \triangleq \dot{\Phi} \dot{K}_t \\ x_{t|t} = x_{t|t-1} + \dot{K}_t \dot{r}_t, \quad \dot{r}_t \triangleq y_t - y_{t|t-1}, \quad y_{t|t-1} = \dot{H}x_{t|t-1} \\ \dot{K}_t = \dot{P}_{t|t-1} \dot{H}^T \left[\dot{H} \dot{P}_{t|t-1} \dot{H}^T + \dot{R} \right]^{-1} \\ \dot{P}_{t+1|t} = \dot{\Phi} \dot{P}_{t|t} \dot{\Phi}^T + \dot{\Gamma} \dot{Q} \dot{\Gamma}^T, \quad \dot{P}_{t|t} = \dot{P}_{t|t-1} - \dot{K}_t \dot{H} \dot{P}_{t|t-1} \\ x_{k|t} = \dot{\Phi}^{k-t} x_{t|t}, \quad y_{k|t} = \dot{H} x_{k|t}, \quad k \geq t \end{array} \right.$$

где $x_{k|t}$ обозначает наилучшую оценку для x_k при учете всех данных y_j , $1 \leq j \leq t$.

2.2. Наилучшая установившаяся линейная модель $\overline{\mathfrak{M}}(\dot{\theta})$

Рассмотрим установившийся режим, достигаемый в (3) при возрастании интервала наблюдения. Это возможно, когда пара матриц $\{\dot{\Phi}, (\dot{\Gamma} \dot{Q} \dot{\Gamma}^T)^{1/2}\}$ в (1), (3) стабилизируема. Эту модель – цель идентификации – обозначим $\overline{\mathfrak{M}}(\dot{\theta})$. Она реализуется в (3), когда итерации Риккати для $\dot{P}_{t+1|t}$ в (3) вошли в режим алгебраических уравнений Риккати (Algebraic Riccati Equations, ARE).

2.3. Множество адаптивных моделей $\overline{\mathcal{A}} \triangleq \{\overline{\mathfrak{M}}(\theta) : \theta \in \Theta\}$

Подобно (3) образуем множество адаптивных моделей $\mathcal{A} \triangleq \{\mathfrak{M}(\theta) : \theta \in \Theta\}$: в них θ вместо $\dot{\theta}$. Рассмотрим модели $\mathfrak{M}(\theta)$ множества \mathcal{A} как достигшие установившегося режима: в них итерации Риккати по типу итераций для $\dot{P}_{t+1|t}$ в (3) вошли в режим ARE. Это множество установившихся адаптивных моделей обозначим $\overline{\mathcal{A}} \triangleq \{\overline{\mathfrak{M}}(\theta) : \theta \in \Theta\}$. Теперь формально предположим, что для каждой установившейся модели $\overline{\mathfrak{M}}(\theta)$ построен ВФК $\{\overline{\mathfrak{M}}(\theta)\} \triangleq \text{ВФК}(\theta)$, осуществлена его численная минимизация и тем самым найден единственный результат $\bar{\theta} \triangleq \text{argmin}_{\theta} \text{ВФК}\{\overline{\mathfrak{M}}(\theta)\}$, которым завершается (в теоретическом пределе при $t \rightarrow \infty$) процесс адаптации. Формально, это есть процесс «сканирования» множества $\overline{\mathcal{A}}$, чтобы отыскать в нем $\overline{\mathfrak{M}}(\bar{\theta})$. Вопрос заключается в следующем: Как соответствующие предельные значения $\bar{\Phi} \triangleq \Phi(\bar{\theta})$, $\bar{\Psi} \triangleq \Psi(\bar{\theta})$, $\bar{\Gamma} \triangleq \Gamma(\bar{\theta})$, $\bar{H} \triangleq H(\bar{\theta})$ и т. п. матриц адаптивных моделей связаны с их «точными» значениями $\dot{\Phi} \triangleq \Phi(\dot{\theta})$, $\dot{\Psi} \triangleq \Psi(\dot{\theta})$, $\dot{\Gamma} \triangleq \Gamma(\dot{\theta})$, $\dot{H} \triangleq H(\dot{\theta})$ и т. п.?

2.4. Множество адаптивных моделей $\overline{\mathcal{A}^*} \triangleq \{\overline{\mathfrak{M}^*}(\theta) : \theta \in \Theta\}$ в базисе МСНМ – мультисенсорных стандартных наблюдаемых моделей

Известно [6], что матрицы

$$(4) \quad \begin{aligned} \Phi_* &= W_* \Phi W_*^{-1} \triangleq \Phi_*(\theta), & \Psi_* &= W_* \Psi \triangleq \Psi_*(\theta) \\ \Gamma_* &= W_* \Gamma \triangleq \Gamma_*(\theta), & H_* &= H W_*^{-1} \end{aligned}$$

единственным образом определяют эквивалентное представление

$$(5) \quad \overline{\mathfrak{M}^*}(\theta) : \left\{ \begin{array}{l} x_{t+1}^* = \Phi_* x_t^* + \Psi_* u_t + \Gamma_* w_t, \quad t \in \mathbb{Z}_+ \\ y_t = H_* x_t^* + v_t, \quad t \in \mathbb{Z}_1 \end{array} \right\}$$

системы в форме МСНМ с матрицами

$$(6) \quad \Phi_* = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \overbrace{\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}}^{p_1} & \overbrace{\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}}^{p_2} & \dots & \overbrace{\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}}^{p_m} \\ \hline * \dots * & * \dots * & & * \dots * \\ \hline 0 & \overbrace{\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}}^{p_2} & \dots & 0 \\ \hline * \dots * & * \dots * & & * \dots * \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & \overbrace{\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}}^{p_m} \\ \hline * \dots * & * \dots * & & * \dots * \end{array} \right] \triangleq \Phi_*(\theta)$$

$$H_* = \left[\begin{array}{c|c|c} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{p_1} & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{p_2} & \dots & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{p_m} \end{array} \right],$$

если некоторые числа r_j выбраны пользователем так, чтобы

$$0 = r_0 < r_1 < \dots < r_{m-1} < r_m = n$$

$$p_j \triangleq r_j - r_{j-1}, \quad j = \overline{1, m}$$

и обратимая $(n \times n)$ -матрица W_* определена выражением

$$(7) \quad W_* \triangleq W_*(\theta) = [h_1^T \dots (h_1 \Phi^{p_1-1})^T \mid h_2^T \dots (h_2 \Phi^{p_2-1})^T \mid \dots \\ \dots \mid h_m^T \dots (h_m \Phi^{p_m-1})^T]^T.$$

Числа (p_1, \dots, p_m) известны как *частные индексы наблюдаемости*, а W_* есть *МСНМ-матрица наблюдаемости*. Особенности перехода к МСНМ при построении ВФК(θ) и его численной минимизации проанализированы в [6] и [7], включая символьные вычисления величин (2), (4), (5), (6) и (7) для выявления их зависимости от θ .

3. Заключение

Данный метод нашел свои применения в различных областях: от навигации до обработки медико-биологических данных и оценивания канала в коллективных сетях цифровых абонентских линий связи. Эта работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Ульяновской области РФ: проекты № 18-47-730001p_a и № 18-41-732002p_мк. Детально этот метод изложен в публикациях [6] и [7], в том числе, в них дан ответ на вопрос раздела (2.3.).

Список литературы

1. Caines P.E. Linear Stochastic Systems. USA & Canada: John Wiley & Sons, Inc., 1988. 874 p.
2. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем / Пер. с англ. Под ред. Я.З. Цыпкина. М.: Мир, 1971. 400 с.
3. Semushin I.V. The APA Based Time-Variant System Identification // 53rd IEEE Conference on Decision and Control. Los Angeles: IEEE, 2014. P. 4137-4141. URL: <http://dx.doi.org/10.1109/CDC.2014.7040033>
4. Verdult V., Verhaegen M. Subspace Identification of Multivariable Linear Parameter-varying Systems // Automatica. 2002. Vol. 38. P. 805-814.
5. Schoukens J., Vaes M., Pintelon R. Linear System Identification in a Nonlinear Setting // IEEE Control Systems. 2016. Vol. 36, No. 3. P. 38-85.
6. Semushin I.V. Adaptation in Stochastic Dynamic Systems—Survey and New Results II // Int. J. Communications, Network and System Sciences. 2011. Vol. 4, No. 4. P. 266-285. URL: http://file.scirp.org/pdf/IJCNS20110400007_96754846.pdf
7. Semushin I.V., Tsyganova Ju.V. Adaptation in Stochastic Dynamic Systems – Survey and New Results IV: Seeking Minimum of API in Parameters of Data // Int. J. Communications, Network and System Sciences. 2013. Vol. 6. P. 513-518. URL: https://file.scirp.org/Html/5-9701802_41061.htm