УДК 517.3

# ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОЛЕТНОЙ ПЕРЕСТРОЙКОЙ ГРУППЫ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

**Л.Н. Казаков**
*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,*
Россия, 150003, Ярославль, Советская ул., 14
E-mail: kazakov@uniyar.ac.ru

**Е.П. Кубышкин**
*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,*
Россия, 150003, Ярославль, Советская ул., 14
E-mail: kubysh.e@yandex.ru

**Д.И. Стерин**
*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,*
Россия, 150003, Ярославль, Советская ул., 14
E-mail: deemon2duo@gmail.com

**Ключевые слова:** беспилотные летательные аппараты, компьютерное моделирование, оптимальное управление.

**Аннотация:** Рассмотрена задача пространственной перестройки группы беспилотных летательных аппаратов (БЛА) с точки зрения минимизации затрачиваемой энергии. Предложен алгоритм построения оптимального управления каждого БЛА, обеспечивающего общий минимальный расход энергетических затрат на пространственную перестройку. На основе полученного алгоритма реализована компьютерная модель. приведены результаты моделирования различных вариантов перестроений группы БЛА.

## 1. Постановка задачи и формулировка результата

Рассматривается группа из $n$ беспилотных летательных аппаратов (БЛА), положение которых относительно некоторой инерциальной системы координат $OXYZ$ определяется системой векторов

$$q_j(t) = \left(x_j(t), y_j(t), z_j(t)\right), j = 1,2, \dots, n.$$

Предполагается, что группа БЛА, находясь в момент времени $t_1$ в точке пространства с координатами $q_{j0}$ и имея скорости $\dot{q}_{j0}$, должна за время $T > 0$ перестроится в точки с координатами $q_{jT}$ и иметь соответственно скорости $\dot{q}_{jT}$. При этом расстояние между отдельными БЛА в группе не должно быть менее $d_{jk} > 0$ и более $D_{jk}$ $(j, k = 1, \dots, n)$. Математическая модель рассматриваемой задачи, включающая уравнения движения и ограничения пространственных переменных, будет иметь вид:

$$m_j \ddot{q}_j + f_j\left(q_j, \dot{q}_j\right) = U_j(t), t_1 < t < t_2 = t_1 + T, \tag{1}$$

(2) $q_j(t_1) = q_{j0}, \dot{q}_j(t_1) = \dot{q}_{j0}, q_j(t_2) = q_{jT}, \dot{q}_j(t_2) = \dot{q}_{jT}$,

(3) $d_{jk} \leq \left|q_j(t) - q_k(t)\right| \leq D_{jk}, j, k = 1, \dots, n.$

где $m_j$ – масса $j$-го БЛА, функция $f_j\left(q_j, \dot{q}_j\right)$ характеризует совокупность внешних сил, действующих на $j$-й БЛА, включающих в себя внешнее трение, ветровую нагрузку и другие внешние силы, $U_j(t) = \left(U_{j1}(t), U_{j2}(t), U_{j3}(t)\right)$ – вектор силового управления БЛА вдоль осей соответствующих координат, $|*|$ – евклидово расстояние между точками. Предполагается, что вес БЛА учтен функцией $U_{j3}(t)$ и что между собой БЛА в группе нет силового взаимодействия.

Энергия силового управления $j$-го БЛА определяется интегралом

(4) $J\left(U_j(t)\right) = \int_0^T (U_j(t), U_j(t))\, dt,$

где (.,.) – скалярное произведения в $R^3$, соответственно

(5) $J(U(t)) = \sum_{j=1}^{n} J(U_j(t))$

общая энергия силового управления группой БЛА. Предполагается, что $U_{jp}(t) \in L_2(0,T)$ – пространству интегрируемых с квадратом функций.

Решаются следующие задачи управления.

**Задача 1.** Найти управления $U_j(t), j = 1, \dots, n$, обеспечивающие перевод траекторий системы уравнений (1) за время $T$>0 из начального положения (2) в конечное с учетом условий (3) и доставляющие минимум функционалу (5).

В работе предложен алгоритм построения оптимального управления, приведены результаты математического моделирования.

**Задача 2.** Найти управления $U_j(t), j = 1, \dots, n,$ при условии $J\left(U_j\right) \leq L_j$, обеспечивающее перевод траекторий системы уравнений (1) из начального положения (2) в конечное с учетом условий (3) за минимальное время $T$>0.

## Общая схема алгоритма построения оптимального уравнения

Рассматривается сначала решение задачи 1 без условий (3) и в случае линейной зависимости функций $f_j(q, \dot{q})$ от своих координат. В этом случае система уравнений (1) на независимые уравнения, соответствующие отдельным координатам. Это позволяет решение задачи 1 построит в явном виде. Для этого задача оптимального управления сводится к проблеме моментов. При этом искомое оптимальное управление $U_{jp}^*(t)$ для каждого $(q_{jp}(t), \dot{q}_{jp}(t))$ принадлежит конечномерному подпространству функций $V_{jp}(0,T) \in L_2(0,T)$, которое определяется параметрами соответствующего уравнения. Обозначим через $Q_{jp}(0,T)$ ортогональное (в смысле скалярного произведения в $L_2(0,T)$) дополнение к $V_{jp}(0,T)$ до всего пространства, т.е. $V_{jp}(0,T) \oplus Q_{jp}(0,T) = L_2(0,T)$. Строится ортонормированный базис функций $\left\{\psi_j(t)\right\}, j = 1,2, \dots$, в $Q_{jp}(0,T)$. Рассматривается теперь задача построения оптимального управления в случае линейной зависимости функций $f_j(q, \dot{q})$ от своих параметров и выполнения условий (3). Выполнение условий (3) добиваемся за счет выбора поправок к управлению $U_{jp}^*(t)$ в виде $U_{jp}^{**}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{jp} \psi_k(t)$. Показано, что решения задачи 1 сводится к нахождению решения некоторой экстремальной задачи для коэффициентов $\alpha_{jp} = \left(\alpha_1^{jp}, \alpha_2^{jp}, \dots\right)$.

В случае нелинейной зависимости функций $f_j(q_j, \dot{q}_j)$ от своих переменных строится сходящийся рекуррентный итерационный процесс, позволяющий свести решения задачи к решению последовательности линейных задач для уравнений вида (1) с условием (3).

Решение задачи 2 находится следующим образом. Выбирается минимальное $T > 0$ при котором возможна пространственная перестройка по следующему правилу. Выбирается некоторое $T_1 > 0$. Решается задача перестройки при $T_1$. Вычисляются значения функционалов (4). Если значения превосходят $L_j$ (хотя бы для одного $j$), то полагают значение $T_2 = 2T_1$, если опять значения превосходят $L_j$ (хотя бы для одного $j$), то снова полагают значение $T_3 = 2T_2$, и т.д. Наступит момент $T_n$, когда значения всех функционалов (4) меньше $L_j$. В этом случае $T_{n+1} = (T_n + T_{n-1})/2$. Теперь в зависимости от соотношения значений функционалов (4) и $L_j$ выбираем либо $T_{n+2} = (T_n + T_{n+1})/2$, либо $T_{n+2} = (T_{n-1} + T_{n+1})/2$ и т.д. В результате получим искомое значение $T_*$, Если же значения функционалов на первом шаге не превосходят $L_j$, то выбираем $T_2 = T_1/2$, и т.д.

Рассмотренный алгоритм получил программную реализацию на компьютере. Ниже приведены результаты численного моделирования пространственных перестроек БЛА для случая линейной зависимости функций $f_j(q, \dot{q})$ от своих координат. Результаты приведены в безразмерных переменных. Предполагается, что все БЛА одинаковы, имеют следующие параметры: $m_j = 5, \alpha_j = 0.1$, время $T = 10$. Движение БЛА происходит в плоскости $z = 3$. Начальные и конечные координаты $x_{j0}, y_{j0}$ и $x_{jT}, y_{jT}$ приведены на рисунках, начальные и конечные скорости $\dot{x_{j0}} = 0, \dot{x_{j0}} = 0, \dot{x_{jT}} = 0$, $\dot{y}_{jT} = 2, d_{jk} = 1$. Рассматривается задача построения управления, минимизирующего функционал (4) и обеспечивающего выполнение левого условия (3) (уход от столкновений).

На рис. 1 и 2 представлены результаты моделирования процесса перестройки десяти БЛА с пересечением траекторий без учета левого условии (3) и с учетом левого условия (3) соответственно. На рисунках точками разных цветов обозначены разные БЛА, окружности с центром в этих точках – минимальные расстояния $d_{jk}$, на которое БЛА могут приблизиться друг к другу. Цветные линии – траектории движения соответствующего по цвету БЛА.

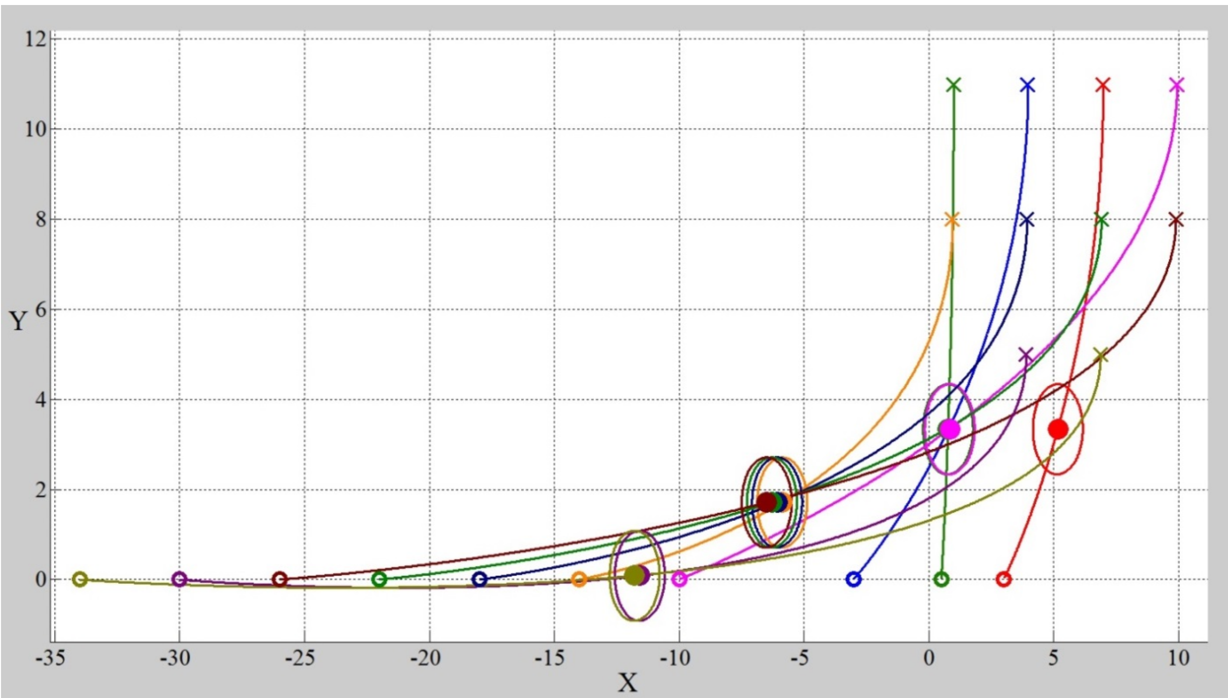


**Рис. 1.** Траектории полета десяти БЛА без учета левого условия (3) (проекция на плоскость OXY, z=3).

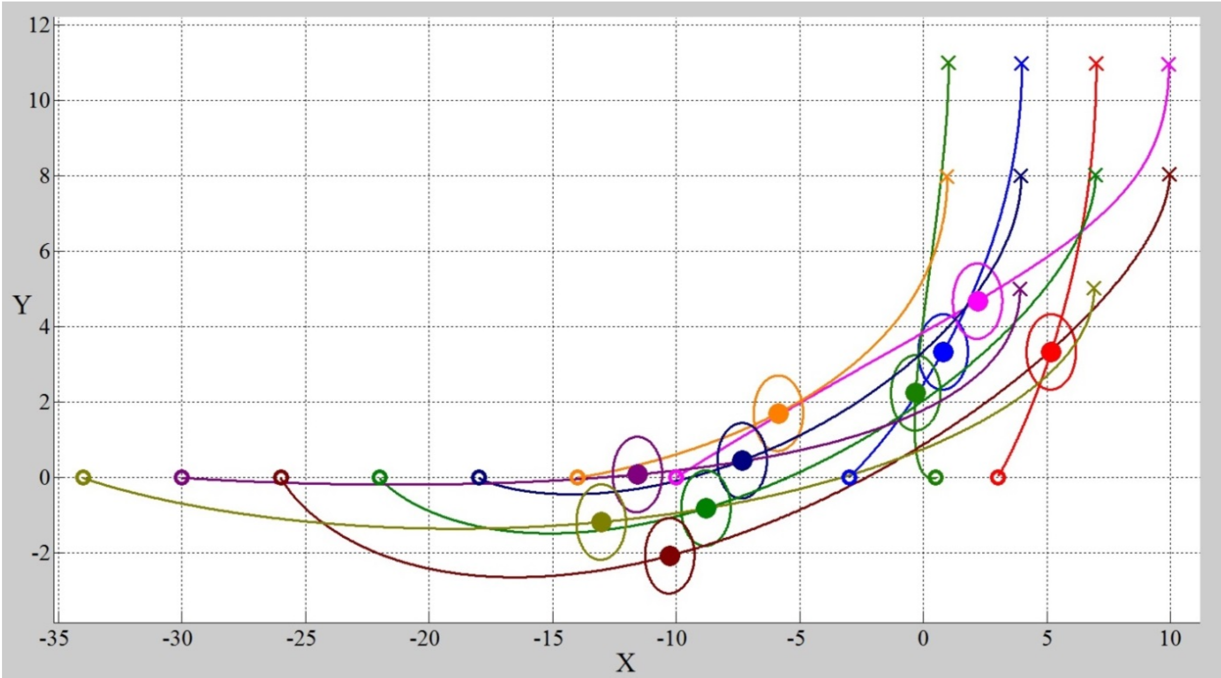


**Рис. 2.** Траектории полета десяти БЛА при учете левого условия (3) (проекция на плоскость OXY, z=3).

Наибольший интерес в этом случае представляет момент непосредственно перед столкновением БЛА на рис. 1. На рис. 2 запечатлен тот же момент времени, но траектории БЛА скорректированы для предотвращения столкновения. Видно, что БЛА не приближаются друг к другу ближе, чем на расстояние $d_{jk}$.

В заключение приведем постановку одной оптимизационной задачи, решение которой представляет большой практический интерес.

**Задача 3**. Найти для системы уравнений (1)-(3) управления $U_j(t)$ $(j = 1, \dots, n)$, реализующие условие

(6) $$min\, max_{1 \le j,k \le n} \left| J(U_j) - J(U_k) \right|.$$

Условие (6) означает, что пространственная перестройка группы БЛА происходит таким образом, при котором разброс энергетических затрат на пространственную перестройку между БЛА в группе минимален, т.е. каждый БЛА в группе расходует максимально близкие между собой значения заряда аккумулятора.