

УДК 517.977

ПУТЕВАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ В СЛУЧАЕ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТИ

А.Н. Канатников*МГТУ им. Н.Э. Баумана*

Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5, стр. 1

E-mail: mathmod@bmstu.ru

Ключевые слова: летательный аппарат, путевая стабилизация, путевые координаты, обратная связь.

Аннотация: Рассмотрена задача путевой (орбитальной) стабилизации в пространстве для летательного аппарата, определяемого шестимерной моделью. Для построения управления использованы специальные путевые координаты, для которых рассмотрены два подхода: метод проекции на плоскость и метод сопутствующего базиса с параллельным переносом. Ранее было построено решение задачи путевой стабилизации в случае постоянной скорости летательного аппарата. В данной работе такое управление построено в случае переменной скорости.

1. Введение

Под задачей путевой (орбитальной) стабилизации мы понимаем вывод объекта на заданную кривую и обеспечение движения объекта вдоль этой кривой. Скорость движения объекта вдоль кривой задается, но не является целью стабилизации движения. Задача путевой стабилизации (path following) отличается от задачи отслеживания траектории (trajectory tracking), в которой целью управления является движение по заданной кривой с предписанным временным графиком. Отсутствие стабилизации по скорости движения приводит к более слабым требованиям по управлению, что может привести к повышению качества управления, особенно при наличии фазовых ограничений и ограничений на управление [1].

Задача путевой стабилизации в применении к механическим системам активно исследовалась (в частности, известны работы по колесным наземным роботам, подводным роботам, летательным аппаратам). Задача решалась как в двумерном, так и трехмерном случаях. Различия в основном связаны с используемой моделью объекта и способом описания отклонения объекта от заданной кривой. Распространенный подход — введение целевой точки на заданной кривой и рассмотрение отклонения характерной точки объекта от целевой точки. При таком подходе габариты объекта не являются существенными, а сам объект естественно рассматривать как материальную точку. В качестве целевой точки мы будем рассматривать ближайшую к объекту точку кривой.

Еще один мотив — рассматривать параметры отклонения объекта от кривой как специальные координаты положения объекта, тогда целью управления будет стабилизация в нуле таких координат. Они привязаны к заданному пути следования объекта, и их естественно назвать путевыми. Путевые координаты очень естественны на плоскости [2, 3], в пространстве их определить труднее. В работе [4] предложены два варианта путевых координат в пространстве и показано, как с помощью таких координат можно решить задачу путевой стабилизации для шестимерной модели летательного аппарата. Однако в этой работе все результаты получены в предположении, что скорость летательного аппарата по величине постоянна. Это ограничение несущественно в кинематической постановке задачи, в которой управлениями являются углы ориентации скорости. Однако в случае шестимерной модели управлениями являются перегрузки, и изменение модуля скорости становится существенным фактором в управлении. Этот фактор в двумерном случае можно изящно учесть с помощью замены независимой переменной (времени) [2].

В данной работе мы рассмотрим задачу путевой стабилизации для шестимерной модели в случае переменной скорости.

2. Модель объекта и путевые координаты

Летательный аппарат (ЛА) будем рассматривать как материальную точку. В этом случае движение удобно записывать, используя угловые координаты траекторной системы [5]:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{L} = V \cos \theta \cos \psi, & \dot{V} = (v_1 - \sin \theta)g, \\ \dot{H} = V \sin \theta, & \dot{\theta} = \frac{(v_2 - \cos \theta)g}{V}, \\ \dot{Z} = -V \cos \theta \sin \psi, & \dot{\psi} = -\frac{v_3 g}{V \cos \theta}. \end{cases}$$

где L — продольная дальность; H — высота; Z — боковое отклонение, отсчитываемое вправо (базис Z, L, H правый); V — модуль вектора скорости; θ — угол наклона вектора скорости; ψ — угол курса, отсчитываемый против часовой стрелки; g — ускорение свободного падения; v_1, v_2, v_3 — управления, которые связаны продольной и поперечной перегрузками n_x, n_y и углом γ крена вектора перегрузки формулами $v_1 = n_x, v_2 = n_y \cos \gamma, v_3 = n_y \sin \gamma$.

В [4] предложены два метода введения путевых координат. Первый — метод проекции на плоскость — является естественным обобщением двумерного случая.

Пусть $\Gamma: \zeta_*(s) = (z_*(s), l_*(s), h_*(s))$ — кривая, описывающая заданный путь в пространстве (здесь s — натуральный параметр). Рассмотрим ее проекцию $\Gamma_0: \xi_*(s) = (z_*(s), l_*(s))$ на плоскость (Z, L) (далее называется горизонтальной). Рассмотрим проекцию (Z, L) положения $\mathbf{r} = (Z, L, H)$ ЛА в пространстве на горизонтальную плоскость. На этой плоскости введем путевые координаты, описывающие положение точки (Z, L) относительно плоской кривой $\xi_*(s)$: переменную s — значение натурального параметра точки S_0 на Γ_0 , ближайшей к точке (Z, L) ; d — расстояние от точки (Z, L) до кривой Γ_0 ; $V \cos \theta$ — модуль проекции вектора скорости на горизонтальную плоскость; β — угол между касательным вектором $\boldsymbol{\tau}$ к кривой Γ_0 в точке $\xi_*(s)$ и проекцией вектора скорости на горизонтальную плоскость. Чтобы полностью описать положение объекта добавим величину $h = H - h_*(s)$ — вертикальное отклонение объекта от предписанного пути и величину θ — угол наклона вектора скорости

объекта. В указанных координатах система (1) примет следующий вид:

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{s} = \frac{V \cos \theta \cos \beta}{1-kd}, & \dot{V} = -g \sin \theta + gv_1, \\ \dot{d} = V \cos \theta \sin \beta, & \dot{\beta} = -\frac{Vk \cos \theta \cos \beta}{1-kd} - \frac{v_3 g}{V \cos \theta}, \\ \dot{h} = V \sin \theta - h'_*(s) \frac{V \cos \theta \cos \beta}{1-kd}, & \dot{\theta} = -\frac{g \cos \theta}{V} + \frac{gv_2}{V}, \end{cases}$$

где k — кривизна кривой $\xi_*(s)$.

Второй метод введения путевых координат основан на использовании специального сопутствующего базиса — базиса с параллельным переносом [4]. Этот базис строится в целевой точке $\zeta_*(s)$, соответствующей натуральному параметру s , он содержит касательный вектор τ к кривой и два нормальных вектора \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 . Динамика сопутствующего базиса с параллельным переносом описывается уравнениями

$$(3) \quad \tau'(s) = k_1 \mathbf{n}_1 + k_2 \mathbf{n}_2, \quad \mathbf{n}'_1(s) = -k_1 \tau(s), \quad \mathbf{n}'_2(s) = -k_2 \tau(s).$$

Динамика одного из нормальных векторов \mathbf{n}_1 определяется дифференциальным уравнением $\mathbf{n}'_1(s) = (\zeta'(s) \times \zeta''(s)) \times \mathbf{n}_1(s)$. Это уравнение позволяет построить сопутствующий базис с параллельным переносом в любой точке кривой путем интегрирования этого дифференциального уравнения. Параметры k_1, k_2 (кривизны) могут быть найдены с помощью уравнений (3) и скалярного произведения, например по следующим формулам:

$$k_1 = (\tau'(s), \mathbf{n}_1), \quad k_2 = (\tau'(s), \mathbf{n}_2).$$

Путевыми координатами можно выбрать параметр s целевой точки, координаты d_1, d_2 вектора отклонения ЛА от целевой точки, их производные по времени \dot{d}_1, \dot{d}_2 и модуль вектора скорости V . В этих координатах уравнения движения имеют следующий вид:

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{s} = \frac{\sqrt{V^2 - \dot{d}_1^2 - \dot{d}_2^2}}{1 - k_1 d_1 - k_2 d_2}, \\ \ddot{d}_1 = -\frac{(V^2 - \dot{d}_1^2 - \dot{d}_2^2)k_1}{1 - k_1 d_1 - k_2 d_2} + (\mathbf{n}_1, \ddot{\mathbf{r}}), \\ \ddot{d}_2 = -\frac{(V^2 - \dot{d}_1^2 - \dot{d}_2^2)k_2}{1 - k_1 d_1 - k_2 d_2} + (\mathbf{n}_2, \ddot{\mathbf{r}}). \end{cases}$$

3. Построение стабилизирующего управления

Системы (2) и (4) аффинные. В них переменную V следует трактовать как известную функцию времени $V(t)$ (константу в частном случае), которая реализуется с помощью управления v_1 и не зависит от значений других управлений.

Задача путевой стабилизации сводится к стабилизации в нуле четырех фазовых переменных (d, h, \dot{d}, \dot{h} в методе проекции на плоскость, $d_1, d_2, \dot{d}_1, \dot{d}_2$ в случае метода сопутствующего базиса). Такое управление можно строить путем приведения к квазиканоническому виду, или нормальной форме при соответствующем выборе выхода.

Для системы (2) в качестве выхода выбираем $\mathbf{y} = (d, h)^T$, управление обозначим $\mathbf{v} = (v_2, v_3)^T$. Продифференцировав второе и третье уравнения системы, придем к представлению

$$(5) \quad \begin{cases} \ddot{\mathbf{y}} = P + V'(t)dP + Q\mathbf{v}, \\ \dot{s} = \frac{V \cos \theta \cos \beta}{1-kd}, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned}
P &= g \cos \theta \left(\begin{array}{c} \sin \theta \sin \beta - \frac{V^2 k \cos \theta \cos \beta}{1-kd} \\ -\cos \theta - h'_*(s) \frac{\sin \theta \cos \beta}{1-kd} - \frac{V^2 k \cos \theta \cos \beta \sin \beta}{(1-kd)^2} - R_1 \end{array} \right), \\
dP &= \left(\begin{array}{c} \cos \theta \sin \beta \\ \sin \theta - h'_*(s) \frac{V \cos \theta \cos \beta}{1-kd} \end{array} \right), \\
Q &= g \left(\begin{array}{cc} -\sin \theta \sin \beta & -\cos \beta \\ \cos \theta + h'_*(s) \frac{\sin \theta \cos \beta}{1-kd} & -h'_*(s) \frac{\sin \beta}{1-kd} \end{array} \right), \\
R_1 &= h''_*(s) \frac{V^2 \cos^2 \theta \cos^2 \beta}{(1-kd)^2} + \\
&\quad + h'_*(s) \frac{V \cos \theta \cos \beta}{(1-kd)^2} \left(k'(s) d \frac{V \cos \theta \cos \beta}{1-kd} + V k \cos \theta \sin \beta \right).
\end{aligned}$$

Представление (5) позволяет стандартным образом найти управление \mathbf{v} , стабилизирующее в нуле переменные d, h, \dot{d}, \dot{h} и тем самым решить задачу путевой стабилизации:

$$(6) \quad \mathbf{v} = -Q^{-1}(P + V'(t)dP + \lambda_1 \dot{\mathbf{y}} + \lambda_2 \mathbf{y}),$$

где числовые параметры λ_1 и λ_2 выбраны так, что многочлен $x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2$ имеет отрицательные корни.

Управление в системе (4) строится аналогичным образом. Вектор $\dot{\mathbf{r}}$ можно представить следующим образом:

$$\mathbf{r} = P_0 + V'(t)dP_0 + Q_0 \mathbf{v},$$

где

$$\begin{aligned}
P_0 &= g \cos \theta \left(\begin{array}{c} \sin \theta \cos \psi \\ -\cos \theta \\ -\sin \theta \sin \psi \end{array} \right), \quad dP_0 = \left(\begin{array}{c} \cos \theta \cos \psi \\ \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \psi \end{array} \right), \\
Q_0 &= \left(\begin{array}{cc} -\sin \theta \cos \psi & \sin \psi \\ \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \sin \psi & \cos \psi \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Это представление позволяет записать систему (4) в виде

$$(7) \quad \begin{cases} \ddot{\mathbf{y}} = P + Q\mathbf{v}, \\ \dot{s} = \frac{\sqrt{V^2 - \dot{d}_1^2 - \dot{d}_2^2}}{1 - k_1 d_1 - k_2 d_2}, \end{cases}$$

где в данном случае $\mathbf{y} = (d_1, d_2)^T$; $Q = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)^T Q_0$;

$$P = -\frac{(V^2 - \dot{d}_1^2 - \dot{d}_2^2)k_1}{1 - k_1 d_1 - k_2 d_2} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)^T (P_0 + V'(t)dP_0).$$

Представление (7) позволяет построить управление, стабилизирующее в нуле переменные $d_1, d_2, \dot{d}_1, \dot{d}_2$, согласно формуле (6), т.е. решить задачу путевой стабилизации с использованием сопутствующего базиса с параллельным переносом.

4. Заключение

В работе показано, как с использованием путевых координат можно решить задачу путевой стабилизации. Ранее были предложены два варианта путевых координат: первый основан на использовании проекции на плоскость и плоских путевых координат, второй — на введении специального сопутствующего базиса. Ранее этот подход был предложен в случае постоянной скорости летательного аппарата, а в данной работе показано, как этот подход работает в случае переменной скорости.

Выкладки показывают, что при переменной скорости в выражениях для управления появляются дополнительные слагаемые, пропорциональные производной $V'(t)$. Профиль скорости $V(t)$ обеспечивается управлением v_1 , совпадающим с продольной перегрузкой. Поэтому итоговое управление $(v_2, v_3)^T$ будет включать в себя и управление v_1 . Однако следует заметить, что в системах (2) и (4) уравнения для производных выхода (d, h в первом случае и d_1, d_2 во втором) содержат профиль $V(t)$ как мультипликативный множитель. От такого множителя можно избавиться в уравнении с помощью замены независимой переменной t , например переменной ν согласно уравнению $\dot{\nu} = V(t)$, что является корректным при $V(t) \geq c > 0$. Тогда, например, в системе (2) взамен второго и третьего уравнений получим

$$d'_\nu = \cos \theta \sin \beta, \quad h'_\nu = \sin \theta - h'_*(s) \frac{\cos \theta \cos \beta}{1 - kd}.$$

Выбрав в качестве канонических переменных d, h, d_ν, h'_ν и повторив приведенные выкладки, получим управление, не содержащее функции $V'(t)$. Аналогичная ситуация и в случае путевых координат на основе сопутствующего базиса.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 18-07-00269а и 19-07-00817а).

Список литературы

1. Aguiar A.P., Hespanha J.P., Kokotović P.V. Performance limitations in reference tracking and path following for nonlinear systems // Automatica. 2008, Vol. 44, No. 3. P. 598-610.
2. Пестерев А.В., Рапопорт Л.Б. Стабилизация движения колесного робота вдоль криволинейной траектории, проложенной по неровной поверхности // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 4. С. 167-176.
3. Канатников А.Н., Касаткина Т.С. Особенности перехода к путевым координатам в задаче путевой стабилизации // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 7. С. 211-222.
4. Канатников А.Н., Лю В., Ткачев С.Б. Путевые координаты в задаче следования вдоль пространственного пути // Математическое моделирование. 2017. Т. 29, № 10. С. 5-19.
5. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Терминальное управление пространственным движением летательных аппаратов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 5. С. 51-64.