

УПРАВЛЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВЫМ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ С ПЕРЕКРЕСТНЫМИ СВЯЗЯМИ КАНАЛОВ

В.Е. Семашкин

АО «Конструкторское бюро приборостроения им. академика А.Г. Шипунова»

Россия, 300001, Тула, ул. Щегловская засека, 59

E-mail: kbkedr@tula.net (с пометкой в теме «для Семашкина В.Е.»)

Ключевые слова: летательный аппарат, перекрестные связи, статическая неустойчивость, двумерные системы, метод комплексных характеристик, управляемость, наблюдаемость, линейно-квадратичное гауссовское управление.

Аннотация: Рассматривается задача управления летательным аппаратом с перекрестными связями между каналами тангажа и рысканья, которые могут сделать аппарат статически неустойчивым. Применен метод комплексных характеристик. Показано, что если динамика канала описана линейной моделью 2-го порядка, то аппарат является управляемым и наблюдаемым независимо от перекрестных связей. Приведен пример синтеза линейно-квадратичного гауссовского управления для статически неустойчивого аппаратом с измеряемыми координатами его центра масс.

1. Введение

Упрощение конструкции летательных аппаратов (ЛА) является всегда актуальной задачей. Однако простая конструкция часто не обеспечивают динамические характеристики. Встает задача компенсации недостатков средствами системы управления (СУ).

Важным частным случаем является снижение или потеря статической устойчивости при взаимном влиянии каналов тангажа и рысканья [1] (т.н. перекрестные связи). При этом для улучшения устойчивости и уменьшения колебаний обычно в СУ вводят обратную связь по датчику угловой скорости корпуса [2, 3]. Однако не всегда на малогабаритный ЛА можно поставить датчик необходимого качества. Цель настоящей работы – демонстрация возможности создания СУ ЛА с перекрестными связями (в т.ч. неустойчивого) без измерения параметров углового движения ЛА.

2. Постановка задачи

Рассмотрим продольно-поперечное движение ЛА, описанное уравнениями [1]:

$$(1) \quad \begin{cases} d^2\alpha/dt^2 + a_1 d\alpha/dt - k_1 d\beta/dt + a_2\alpha - k_2\beta = a_3\delta_y - k_3\delta_z, & d^2Y/dt^2 = \alpha, \\ d^2\beta/dt^2 + a_1 d\beta/dt + k_1 d\alpha/dt + a_2\beta + k_2\alpha = a_3\delta_z + k_3\delta_y, & d^2Z/dt^2 = \beta, \end{cases}$$

где α , β , δ_y , δ_z – углы атаки, скольжения, отклонения руля высоты и руля курса соответственно, a_1 , a_2 , a_3 – константы, характеризующие демпфирование, устойчивость и ко-

эффицент передачи каждого канала, k_1, k_2, k_3 – константы, характеризующие перекрестные связи по моменту демпфирования, стабилизирующему моменту и моменту управления соответственно, $a_3 \neq 0 \cup k_3 \neq 0$, Y, Z – поперечные координаты центра масс (ц.м.) ЛА. Требуется сформировать контур управления отклонением рулей δ_y, δ_z , обеспечивающий вывод и удержание ц.м. ЛА на заданной траектории наведения с затуханием колебаний по α и β без прямого измерения α, β и их производных.

3. Исследование задачи

3.1. Управляемость и наблюдаемость ЛА с перекрестными связями

Система (1) является двумерной динамической системой с антисимметричными перекрестными связями между каналами [4]. Поскольку она является линейной, к ней напрямую можно применять классические методы теории управления. Запишем уравнения состояния в нормальной форме Коши:

$$(2) \quad \begin{cases} dx_{2D}/dt = A_{2D}x_{2D} + B_{2D}u_{2D}, \\ y_{2D} = C_{2D}x_{2D}, \end{cases}$$

где $x_{2D} \in \mathbb{R}^{2n}$, $u_{2D} \in \mathbb{R}^{2m}$, $y_{2D} \in \mathbb{R}^{2r}$ – вектора состояния, управления и выхода соответственно (здесь и далее вектора принимаются вектор-столбцами), n – размерность каждого канала, m – размерность входа в каждом канале, r – размерность выхода в каждом канале, $A_{2D} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $B_{2D} \in \mathbb{R}^{2n \times 2m}$, $C_{2D} \in \mathbb{R}^{2r \times 2n}$ – матрицы коэффициентов. Для системы (1) $n = 4$, $m = r = 1$, $u_{2D} = (\delta_y \ \delta_z)^T$, $y_{2D} = (Y \ Z)^T$. Примем $x_{2D} = (d\alpha/dt \ \alpha \ dY/dt \ Y \ d\beta/dt \ \beta \ dZ/dt \ Z)^T$. Здесь и далее индекс 2D обозначает матрицы и вектора действительных чисел, относящиеся к двумерной системе.

Матрица управляемости системы будет иметь размер 8×16 . Ее ведущий главный минор 8 порядка $\det(B_{2D} \ A_{2D}B_{2D} \ A_{2D}^2B_{2D} \ A_{2D}^3B_{2D}) = (a_3^2 + k_3^2)^4$. Матрица наблюдаемости системы будет иметь размер 16×8 . Ее ведущий главный минор 8 порядка $\det\left((C_{2D})^T \ (C_{2D}A_{2D})^T \ (C_{2D}A_{2D}^2)^T \ (C_{2D}A_{2D}^3)^T\right)^T = 1$. Следовательно, за исключением вырожденного случая $a_3 = k_3 = 0$ ЛА с перекрестными связями (1) полностью управляем и наблюдаем независимо от параметров каналов и связей между ними.

3.2. Формализация задачи в комплексных переменных

В силу специфики двумерных систем матрицы A_{2D} , B_{2D} , C_{2D} в (2) будут иметь блочную структуру с повторяющимися блоками. Для сокращения выкладок и исключения обработки повторяющихся чисел при анализе двумерных систем с антисимметричными перекрестными связями удобно заменить пары подобных переменных в каналах на комплексные переменные [4]. Система (1) примет вид:

$$(3) \quad \begin{cases} d^2\bar{\alpha}/dt^2 + \bar{a}_1 d\bar{\alpha}/dt + \bar{a}_2\bar{\alpha} = \bar{a}_3\bar{\delta}, \\ d^2\bar{Y}/dt^2 = \bar{\alpha}, \end{cases}$$

где $\bar{\alpha} = \alpha + j\beta$ – комплексный угол атаки, j – мнимая единица, $\bar{\delta} = \delta_y + j\delta_z$ – комплексный угол отклонения рулей, $\bar{Y} = Y + jZ$ – комплексная координата ц.м., $\bar{a}_n = a_n + jk_n$, $n = 1, 2, 3$ – комплексные параметры модели ЛА, $|\bar{a}_3| \neq 0$. Здесь и далее

чертой обозначаются комплексные величины, относящиеся к двумерной системе. По (3) можно составить уравнения состояния в нормальной форме Коши:

$$(4) \quad \begin{cases} d\bar{x}/dt = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}\bar{u}, \\ \bar{y} = \bar{C}\bar{x}, \end{cases}$$

где $\bar{x} \in \mathbb{C}^n$, $\bar{u} \in \mathbb{C}^m$, $\bar{y} \in \mathbb{C}^r$ – вектора состояния, управления и выхода соответственно в комплексных координатах, $\bar{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\bar{B} \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $\bar{C} \in \mathbb{C}^{r \times n}$ – матрицы коэффициентов. В случае (3) $\bar{x} = (d\bar{\alpha}/dt \quad \bar{\alpha} \quad d\bar{Y}/dt \quad \bar{Y})^T$, $\bar{u} = \bar{\delta}$, $\bar{y} = \bar{Y}$.

Для равносильности систем (2) и (4) достаточно вектора и матрицы в (2) формировать блочно по формулам

$$(5) \quad v_{2D} = (\operatorname{Re} \bar{v} \quad \operatorname{Im} \bar{v})^T,$$

$$(6) \quad M_{2D} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \bar{M} & -\operatorname{Im} \bar{M} \\ \operatorname{Im} \bar{M} & \operatorname{Re} \bar{M} \end{pmatrix},$$

$$\forall v \in \{x, u, y\}, \quad M \in \{A, B, C\}.$$

3.2. Анализ и синтез СУ с применением комплексных переменных

Будем говорить, что вектора $\bar{v} \in \mathbb{C}^n$ и $v_{2D} \in \mathbb{R}^{2n}$ друг другу соответствуют, если выполняется равенство (5). Будем говорить, что матрицы $\bar{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $M_{2D} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ друг другу соответствуют, если выполняется равенство (6). Покажем, что алгебраические операции сохраняют соответствие матриц и векторов.

Теорема 1. Пусть вектора $\bar{v} \in \mathbb{C}^n$ и $v_{2D} \in \mathbb{R}^{2n}$ друг другу соответствуют, $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда друг другу соответствуют вектора $\lambda \bar{v}$ и λv_{2D} .

Теорема 2. Пусть матрицы $\bar{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $M_{2D} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ друг другу соответствуют, $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда друг другу соответствуют матрицы $\lambda \bar{M}$ и λM_{2D} .

Теорема 3. Пусть вектора $\bar{a} \in \mathbb{C}^n$ и $a_{2D} \in \mathbb{R}^{2n}$ друг другу соответствуют, вектора $\bar{b} \in \mathbb{C}^n$ и $b_{2D} \in \mathbb{R}^{2n}$ друг другу соответствуют, тогда друг другу соответствуют вектора $\bar{a} + \bar{b}$ и $a_{2D} + b_{2D}$.

Теорема 4. Пусть матрицы $\bar{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $A_{2D} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ друг другу соответствуют, матрицы $\bar{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $B_{2D} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ друг другу соответствуют, тогда друг другу соответствуют матрицы $\bar{A} + \bar{B}$ и $A_{2D} + B_{2D}$.

Теорема 5. Пусть вектора $\bar{v} \in \mathbb{C}^n$ и $v_{2D} \in \mathbb{R}^{2n}$ друг другу соответствуют, матрицы $\bar{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $M_{2D} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ друг другу соответствуют, тогда друг другу соответствуют вектора $\bar{M}\bar{v}$ и $M_{2D}v_{2D}$.

Доказательство теорем 1-5 тривиально (прямая подстановка в формулы (5), (6)).

Теорема 6. Пусть матрицы $\bar{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $M_{2D} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ друг другу соответствуют. Тогда для существования матрицы M_{2D}^{-1} необходимо и достаточно существования матрицы \bar{M}^{-1} , и, при их существовании, матрицы \bar{M}^{-1} и M_{2D}^{-1} друг другу соответствуют.

Доказательство теоремы 6. Пусть существует матрица \bar{M}^{-1} . Приравнявая действительные и мнимые части уравнения $\bar{M}^{-1}\bar{M} = E_n$, где E_n – единичная матрица размера $n \times n$, получаем равносильную систему

$$(7) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} \bar{M}^{-1} \operatorname{Re} \bar{M} - \operatorname{Im} \bar{M}^{-1} \operatorname{Im} \bar{M} = E_n, \\ \operatorname{Im} \bar{M}^{-1} \operatorname{Re} \bar{M} + \operatorname{Re} \bar{M}^{-1} \operatorname{Im} \bar{M} = O_n, \end{cases}$$

где O_n – нулевая матрица $n \times n$. Проверкой убеждаемся, что уравнение

$$(8) \quad \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \bar{M}^{-1} & -\operatorname{Im} \bar{M}^{-1} \\ \operatorname{Im} \bar{M}^{-1} & \operatorname{Re} \bar{M}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \bar{M} & -\operatorname{Im} \bar{M} \\ \operatorname{Im} \bar{M} & \operatorname{Re} \bar{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & O_n \\ O_n & E_n \end{pmatrix} \equiv E_{2n}.$$

равносильно системе (7). Аналогично показывается, что $\bar{M}\bar{M}^{-1} = E_n$ равносильно

$$(9) \quad \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \bar{M} & -\operatorname{Im} \bar{M} \\ \operatorname{Im} \bar{M} & \operatorname{Re} \bar{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \bar{M}^{-1} & -\operatorname{Im} \bar{M}^{-1} \\ \operatorname{Im} \bar{M}^{-1} & \operatorname{Re} \bar{M}^{-1} \end{pmatrix} = E_{2n}.$$

Из (8) и (9) следует, что M_{2D}^{-1} существует и

$$M_{2D}^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \bar{M}^{-1} & -\operatorname{Im} \bar{M}^{-1} \\ \operatorname{Im} \bar{M}^{-1} & \operatorname{Re} \bar{M}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь существует матрица M_{2D}^{-1} . Разобьем ее на блоки $n \times n$ вида:

$$M_{2D}^{-1} = \begin{pmatrix} N_R & -N_I - \Delta_I \\ N_I & N_R + \Delta_R \end{pmatrix}.$$

Проверкой убеждаемся, что уравнение

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} \bar{M} & -\operatorname{Im} \bar{M} \\ \operatorname{Im} \bar{M} & \operatorname{Re} \bar{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_R & -N_I - \Delta_I \\ N_I & N_R + \Delta_R \end{pmatrix} = E_{2n}$$

равносильно системе из двух матричных уравнений

$$(10) \quad \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \bar{M} & -\operatorname{Im} \bar{M} \\ \operatorname{Im} \bar{M} & \operatorname{Re} \bar{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_R \\ N_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n \\ O_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \bar{M} & -\operatorname{Im} \bar{M} \\ \operatorname{Im} \bar{M} & \operatorname{Re} \bar{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_R \\ \Delta_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_n \\ O_n \end{pmatrix}.$$

Первое уравнение (10) равносильно

$$(11) \quad \bar{M}(N_R + jN_I) = E_n.$$

Из второго уравнения (10) следует, что $\Delta_R = \Delta_I = O_n$. Затем убеждаемся, что уравнение

$$\begin{pmatrix} N_R & -N_I \\ N_I & N_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \bar{M} & -\operatorname{Im} \bar{M} \\ \operatorname{Im} \bar{M} & \operatorname{Re} \bar{M} \end{pmatrix} = E_{2n}$$

равносильно

$$(12) \quad (N_R + jN_I)\bar{M} = E_n.$$

Из (11) и (12) следует, что \bar{M}^{-1} существует и $\bar{M}^{-1} = N_R + jN_I$. Теорема 6 доказана. ■

Из теорем 1-6 следует, что если система в действительных числах (2) замкнута управлением u_{2D} , которое формируется некоторой последовательностью алгебраических действий над векторами и матрицами системы (2), то замкнув равносильную систему в комплексных числах (4) управлением \bar{u} , формируемым той же последовательностью действий над векторами и матрицами системы (4), получим равносильные замкнутые системы.

4. Пример решения задачи управления ЛА

Пусть $\bar{a}_1 = 5$, $\bar{a}_2 = 625(1 + j0,3)$, $\bar{a}_3 = 625$. ЛА, описываемый данной моделью, статически неустойчив [2]. Пусть остальные звенья системы описываются уравнениями:

$$d\bar{\delta}/dt = 100\bar{u} - (100 + j40)\bar{\delta}, \quad d\bar{Y}_H/dt = 100\bar{Y} - 100\bar{Y}_H,$$

где $\bar{u} \in \mathbb{C}$ – сигнал управления, $\bar{Y}_H \in \mathbb{C}$ – измеренная координата.

Выбран вектор состояния $\bar{x} = (\bar{\delta} \quad d\bar{\alpha}/dt \quad \bar{\alpha} \quad d\bar{Y}/dt \quad \bar{Y} \quad \bar{Y}_H)^T$. Синтезировано линейно-квадратичное гауссовское управление вида

$$\bar{u} = -\bar{k}\bar{x}^*, \quad d\bar{x}^*/dt = \bar{A}\bar{x}^* + \bar{B}\bar{u} + \bar{L}(\bar{Y}_H - \bar{C}\bar{x}^*),$$

где \bar{x}^* – наблюдаемое состояние, $\bar{L} = (-0,0055 - j0,0967 \quad -9875 + j42473 \quad \dots$

$-1723 - j293,7 \quad 36,94 - j71,99 \quad 10,75 - j0,6532 \quad 10,22)^T$, $\bar{k} = (0,1024 \dots$

$0,0172 + j0,0055 \quad 0,1872 - j0,0545 \quad 7,897 + j4,802 \quad 27,02 + j16,43 \quad 0)^T$. Переходный

процесс вызывается ненулевым начальным условием по $\text{Re}\bar{Y}$ (рис. 1). Примечательно, что переходный процесс по координате проходит только в ее действительной части, что говорит о правильной фазировке полученной замкнутой системы.

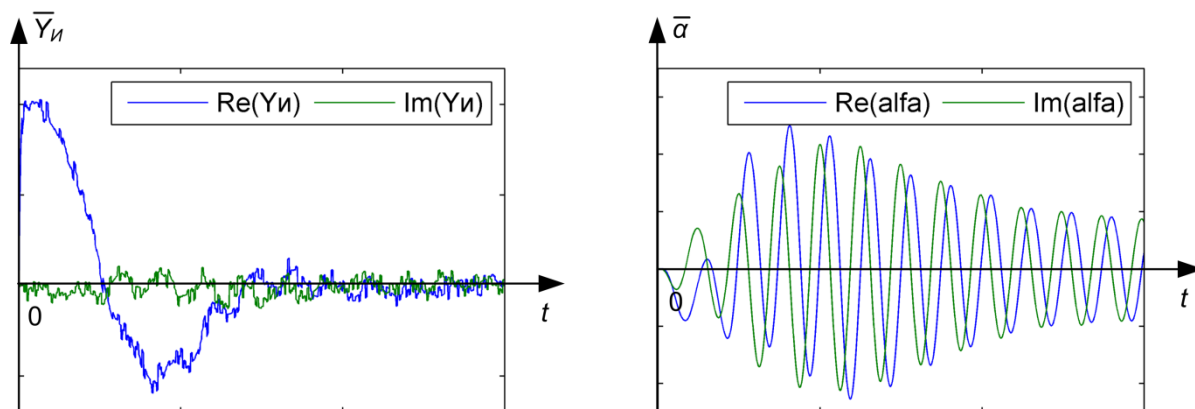


Рис. 1. Пример переходных процессов вывода на линию наведения неустойчивого ЛА.

5. Заключение

В работе показано, что ЛА с перекрестными связям полностью управляем и наблюдаем независимо от параметров каналов и связей между ними. Показано, что для синтеза закона управления можно применять метод комплексных параметров. Приведен пример управления неустойчивым из-за перекрестных связей ЛА.

Список литературы

1. Лукошкин В.В. Влияние аэродинамических перекрестных связей на свободное продольно-боковое движение летательного аппарата // Ученые записки ЦАГИ. 1974. Т. 5, № 3. С. 81-89.
2. Морозов В.И., Долгова Т.С., Акулинин С.И. Влияние сил Магнуса на полет управляемого артиллерийского снаряда // Известия ТулГУ. Технические науки. 2012. № 11. Ч. 1. С. 240-250.

3. Бабичев В.И., Морозов В.И., Рабинович В.И., Монькин В.Б., Долгова Т.С., Акулинин С.И. Способ формирования сигналов управления вращающимся по углу крена самонаводящимся снарядом // Патент РФ 2482426; опубл. 20.05.2013.
4. Казамаров А.А., Палатник А.М., Роднянский Л.О. Динамика двумерных систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1967. 308 с.
5. Лебедев А.А., Карабанов В.А. Динамика систем управления беспилотными летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1965. 528 с.