

ПОТОКИ ПАРЕТО И ИХ ОБСЛУЖИВАНИЕ

Ю.И. Рыжиков

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
Россия, 117997, Санкт-Петербург, 14 линия, д. 39
E-mail: ryzhbox@yandex.ru

А.В. Уланов

Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского
Россия, 197198, Санкт-Петербург, ул. Ждановская, д. 13
E-mail: ulanov246@rambler.ru

Р.С. Хабаров

Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского
Россия, 197198, Санкт-Петербург, ул. Ждановская, д. 13
E-mail: xabarov.r@yandex.ru

Ключевые слова: самоподобный трафик, распределение Парето, системы массового обслуживания, дробление производительности, имитационное моделирование, численные методы.

Аннотация: Представлен метод численного расчета многоканальных систем массового обслуживания с фрактальным входным потоком. На основе метода составлен алгоритм расчета, который программно реализован на Фортране. Проведено исследование влияния эффекта дробления производительности для упомянутых систем.

1. Введение

В настоящее время все большее распространение получают мультисервисные сети [1]. Под мультисервисной сетью понимается единая среда, способная передавать и обрабатывать голос, видеоизображения и данные с использованием одной и той же инфраструктуры. В процессе ее работы необходимо обеспечить определенный уровень качества обслуживания (QoS) для разнородного обрабатываемого трафика.

Продолжительное время считалось, что трафик сети описывается классическим пуассоновским потоком. Экспериментальные исследования [2-10] показывают, что потоки в современных сетях не являются простейшими, имеют явно выраженный всплесковый характер и выглядят качественно одинаково при любых масштабах временной оси, т. е. обладают так называемым свойством самоподобия.

При проектировании сетей на системном уровне наиболее подходящими математическими моделями являются системы с очередями. В [11] приводится определение фрактальных систем массового обслуживания. Под ними понимаются системы класса $GI/GI/n/m$, в которых интервалы поступления заявок и/или время их обслуживания описываются распределениями с тяжелыми хвостами – асимптотически степенными, имеющими конечное математическое ожидание и бесконечную дисперсию.

Типичными представителями фрактальных систем с очередями являются системы $Pa/M/n/m$, $M/Pa/n/m$ и $Pa/Pa/n/m$. Здесь символом Pa обозначено распределе-

ние Парето (РП). На основании [6,7,9] можно сделать вывод, что распределение длин пакетов трафика мультисервисных сетей обладает свойством самоподобия и распределение времени обслуживания может быть представлено РП. Поэтому для таких систем подойдет модель $M/Pa/n/m$. В [12] приводятся доводы, что каналы сетей передачи данных (СПД) при обслуживании в течение распределенного по Парето времени x создают на своих выходах потоки с таким же распределением длительности τ интервалов между заявками. Исходя из этого, распределение длительности интервалов между заявками в СПД также обладает свойством самоподобия и для их анализа следует использовать модели $Pa/M/n/m$. Модель $Pa/Pa/n/m$ является более общей для СПД – это СМО с фрактальным входным потоком и фрактальным временем обслуживания.

В [13] рассмотрена теория и выполнен практический расчет одноканальных систем $M/Pa/1$ и $Pa/M/1$.

Негативное влияние сгущений в потоке на QoS заявок, очевидно, может быть ослаблено простым увеличением быстродействия каналов обслуживания и/или их количеством. Нетривиальной является проблема дробления производительности: расчет среднего времени ожидания и пребывания заявки в системе при сохранении коэффициента загрузки. В [14] приведена количественная оценка упомянутых характеристик для модели $M/E_3/n$ – см. таблицу 1.

Таблица 1. Эффект дробления производительности для $M/E_3/n$

Показатель		Число каналов		
		1	2	3
Ожидание	Расчет	2.6667	2.3944	2.1941
	Имитация	2.6419	2.3689	2.1241
Пребывание	Расчет	3.6667	4.3944	5.1941
	Имитация	3.6419	4.3689	5.1241

Как видно из таблицы 1 эффект дробления производительности для СМО $M/G/n$ проявляется следующим образом:

- с ростом числа каналов среднее время ожидания начала обслуживания уменьшается, но незначительно;
- среднее время обслуживания изменяется обратно пропорционально интенсивности обслуживания в одном канале, т. е. возрастает, причем быстрее, чем уменьшается среднее время ожидания;
- среднее время пребывания является суммой средних времен ожидания и обслуживания и по числу каналов возрастает.

В связи с этим представляет интерес оценка эффекта дробления производительности для многоканальной СМО с Парето-поток.

2. Распределение Парето

Концепция самоподобия тесно связана с получившим большую известность понятием фракталов и теорией хаоса. Определение фрактала, данное Б. Мандельбротом [15], звучит так: «Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому».

На практике самоподобный трафик чаще всего представляется распределением Парето [14], имеющим функцию распределения

$$F(t) = 1 - (K/t)^\alpha$$

и плотность

$$f(t) = \alpha K^\alpha / t^{\alpha+1}$$

Важнейшей особенностью РП является то, что его моменты порядка m имеют конечное значение лишь при $\alpha > m$. В этом случае:

$$(1) \quad f_m = \frac{\alpha K^m}{\alpha - m}.$$

Если существует второй момент, то дисперсия распределения Парето

$$D = \frac{\alpha K^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 1)}$$

Соответственно квадрат коэффициента вариации

$$(2) \quad v^2 = D / f_1^2 = 1 / [\alpha(\alpha - 2)]$$

3. Численный расчет СМО Ра/М/п

Такач показал [16], что уравнения для нахождения распределения вероятностей $\{\pi_k\}$ числа заявок вложенной цепи при $k \geq n$, могут быть преобразованы к виду

$$(3) \quad \pi_k = C \omega^{k-n}, \quad k = n-1, n, \dots,$$

где ω – корень уравнения

$$(4) \quad \omega = \int_0^\infty e^{-n\mu t(1-\omega)} dA(t)$$

из промежутка $(0, 1)$, который существует при $n\mu a > 1$.

Заметим, что при $k = n$ из формулы (3) следует равенство $C = \pi_n$, так что

$$\pi_k = \pi_n \omega^{k-n}, \quad k = n-1, n, \dots$$

и проблема состоит в определении начальных вероятностей $\{\pi_k\}$ при $k < n$.

Рассмотрим особенности реализации приведенных выше уравнений для распределения Парето. Уравнение (4) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \omega &= \int_0^\infty e^{-n\mu t(1-\omega)} \frac{\alpha K^\alpha}{t^{\alpha+1}} dt = \alpha K^\alpha \int_0^\infty t^{-\alpha-1} e^{-n\mu t(1-\omega)} dt \\ &= \alpha [Kn\mu(1-\omega)]^\alpha \int_{Kn\mu(1-\omega)}^\infty u^{-\alpha-1} e^{-u} du. \end{aligned}$$

Последний интеграл является неполной гамма-функцией

$$\hat{\Gamma}(-\alpha, z) = \Gamma(-\alpha) - \gamma(-\alpha, z),$$

где $z = Kn\mu(1-\omega)$. Для вычисления гамма-функции от отрицательного аргумента воспользуемся [17]:

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{-\pi}{z \sin \pi z}.$$

Необходимая функция $\gamma(x, z)$ вычисляется с помощью степенного ряда:

$$\gamma(x, z) = z^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!(x+n)}.$$

Алгоритм расчета системы $Pa/M/n$ был программно реализован на языке Фортран 90.

4. Постановка задачи исследования

Расчет среднего времени ожидания обслуживания и пребывания в системе будем производить при коэффициентах загрузки $\rho = 0,9$ и $\rho = 0,7$. Первое значение соответствует «критическим» режимам работы системы, последнее — типичное значение для систем, функционирующих в нормальных условиях. Для выбора значений параметра α воспользуемся данными исследований трафика мультисервисных сетей [6]. Для нахождения параметра α по значениям Херста воспользуемся соотношением $H = (3 - \alpha)/2$. Полученные значения параметра α указаны в таблице 2.

Таблица 2. Оценка параметра α распределения Парето для различных видов трафика

Вид трафика	Оценка параметра самоподобия H	Значение параметра α
Трафик потокового видео	0,80	1,40
Трафик транзакций	0,75	1,50
Трафик данных	0,70	1,60
Аудиотрафик	0,68	1,64

Проанализировав значения α для различных видов трафика, выберем для расчетов одно из типичных значений для трафика мультисервисной сети $\alpha = 1.5$. Сравним результаты расчета СМО $Pa/M/n$ с результатами имитационного моделирования (ИМ) для СМО $E_3/M/n$ и $H_2/M/n$ с коэффициентами вариации $\nu = 0.577$ и $3,0$ соответственно. Из (2) находим, что $\nu = 0.577$ соответствует $\alpha = 2.1$, а $\nu = 3.0$ соответствует $\alpha = 3.0$. Таким образом, расчет будем проводить при $\alpha = \{1.5, 2.1, 3.0\}$.

5. Результаты расчетов и имитационное моделирование

С помощью упомянутого выше численного метода произведем расчет среднего времени ожидания при дроблении производительности. Необходимый для расчета параметр РП K рассчитывался из (1), а интенсивность μ экспоненциального обслуживания пересчитывается для каждого n — из формулы $\rho = \lambda/(n\mu)$ при заданном значении ρ .

Отдельно отметим, что нахождение корня уравнения (3) производится один раз для $n = 1$, далее при различных значениях n его значение не изменяется, поскольку:

$$\omega = \int_0^{\infty} e^{-n\frac{\mu}{n}t(1-\omega)} dA(t) = \int_0^{\infty} e^{-\mu t(1-\omega)}.$$

Результаты расчетов среднего времени ожидания для коэффициента загрузки $\rho = 0,9$ и $\rho = 0,7$ представлены на рисунках 1 и 2. На этих же графиках для сравнения приведены результаты имитационного моделирования для системы $H_2/M/n$ с коэффициентом вариации гиперэкспоненциального распределения $\nu = 3.0$ и для $E_3/M/n$ с коэффициентом вариации распределения Эрланга $\nu = 0.577$. Для корректности сравнения параметры распределений выбирались так, чтобы первый момент сохранялся равным единице. Для распределения Pa происходил пересчет параметра K согласно (1),

для E_3 и $\nu = 0.577$ значения параметров $r = 3$, $\mu = 3.0$, для H_2 при $\nu = 3.0$ значения $y = 0.0411$, $\mu_1 = 0.0938$ и $\mu_2 = 1.7062$.

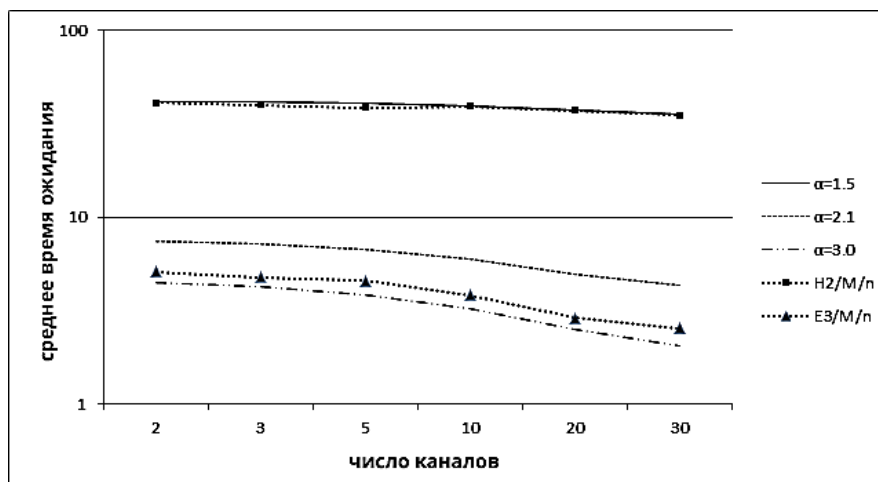


Рис. 1. Среднее время ожидания, $\rho = 0,9$

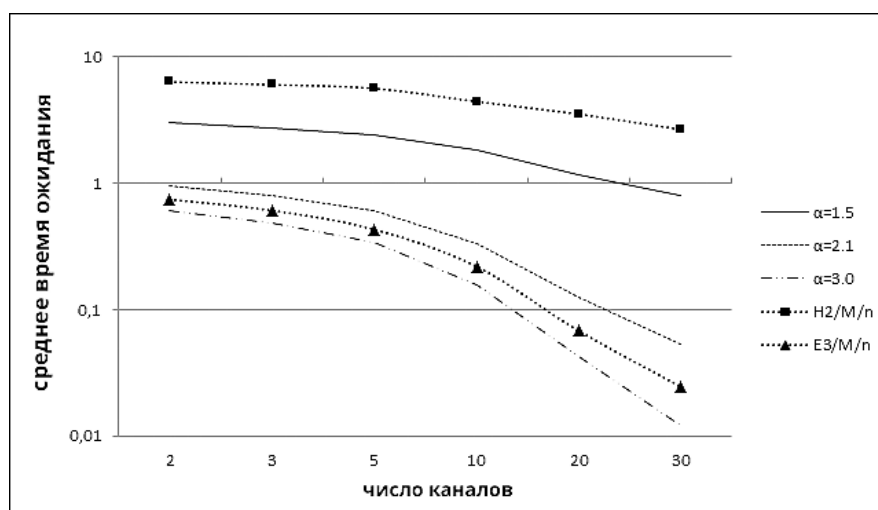


Рис. 2. Среднее время ожидания, $\rho = 0,7$.

Из полученных результатов видно, что эффект дробления производительности, заключающийся в медленном убывании времени ожидания по числу каналов, прослеживается и в случае фрактального потока заявок. При $\alpha = 3.0$ (соответствующий коэффициент вариации $\nu = 0.577$ значения времени ожидания для СМО $Pa/M/n$), как можно было предположить, близки значениям $E_3/M/n$. Однако для $\alpha = 2.1$ схожесть значений с $H_2/M/n$ не наблюдается. Для $\rho = 0,9$ времена ожидания для СМО $H_2/M/n$ практически совпадают с $Pa/M/n$ при $\alpha = 1.5$.

На рис. 3 и 4 приводятся результаты расчетов для среднего времени пребывания для тех же коэффициентов загрузки.

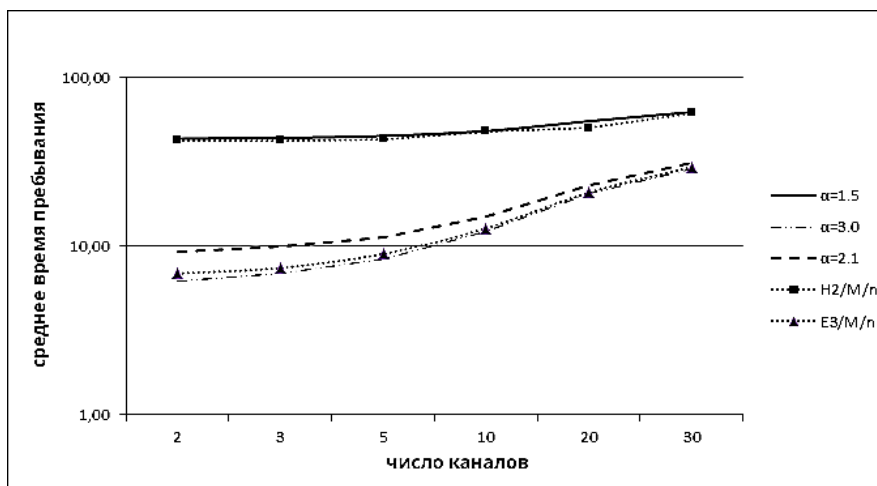


Рис. 3. Среднее время пребывания, $\rho = 0,9$.

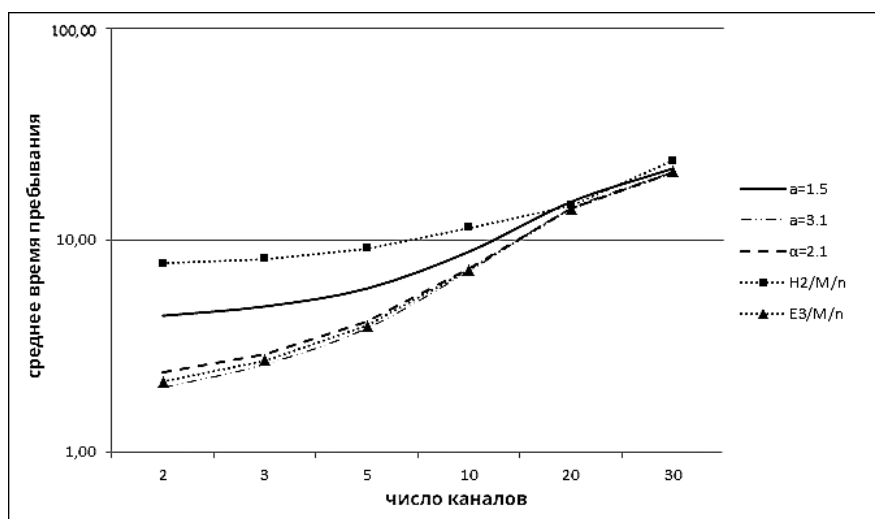


Рис. 4. Среднее время пребывания, $\rho = 0,7$.

Здесь также наблюдается сохранение влияния эффекта дробления производительности на СМО с фрактальным входным потоком. Для $\rho = 0,9$ значения времени пребывания для $Pa/M/n$ с $\alpha = 1.5$ и $H_2/M/n$ практически совпадают, несмотря на то, что при данном значении α у распределения Парето бесконечный второй момент и, соответственно, коэффициент вариации. С ростом числа каналов наблюдается снижение влияния коэффициента вариации входного потока на среднее время пребывания заявок. При $\rho = 0,7$ и количестве каналов более 20 значения практически совпадают.

6. Заключение

В результате анализа эффекта дробления производительности для многоканальных систем массового обслуживания с фрактальным входным потоком с помощью модифицированного метода Такача было выявлено, что в целом эффект проявляется аналогично системам $M/G/n$. В дальнейшем планируется исследование эффекта суммирования и прореживания фрактальных потоков.

Список литературы

1. Мультисервисные сети. <http://compress.ru/article.aspx?id=9404#01>.
2. Букашкин С.А., Буранова М.А., Сапрыкин А.В. Исследование статистических свойств мультимедийного трафика при обработке в сети MPLS // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. 2016. № 4. С. 34-41.
3. Моргайлов Д.Д., Ладыженский Ю.В., Моатаз Ю. Моделирование самоподобного входного трафика процессоров в системе NS-2 // Информатика и компьютерные технологии - 2012. Секция 3. Интернет-технологии, компьютерные сети и телекоммуникации. 2012. С. 232-239.
4. Статистические свойства интернет трафика. <http://www.nag.ru/goodies/articles/sst/sst.html>.
5. Тарасов Д.В., Парамонов А.И., Кучерявый А.Е. Особенности видеотрафика для сетей связи следующего поколения // Электросвязь. 2010. №1. С.37-43.
6. Федорова М. Л., Леденева Т. М. Об Исследовании свойства самоподобия трафика мультисервисной сети // Вестник ВГУ, серия: системный анализ и информационные технологии. 2010. № 1. С. 46-54.
7. «Фрактальная катастрофа» TCP/IP. http://itc.ua/articles/fraktalnaya_katastrofa_tcp_ip_5571/.
8. Шелухин О.И., Тенякишев А.М., Осин А.В. Фрактальные процессы в телекоммуникациях / Под ред. О.И. Шелухина. М.: Радиотехника, 2003. 480 с.
9. Leland W.E. [et al.] On the self-similar nature of Ethernet traffic (extended version) // IEEE ACM Transaction on networking. 1994. № 1 (2). P. 1-15.
10. Klemm A., Lindemann C., Lohmann M. Traffic Modeling of IP Networks Using the Batch Markovian Arrival Process // Performance Evaluation. 2003. № 54 (2). P. 149-173.
11. Задорожный В.Н., Захаренкова Т.Р. Методы планирования имитационных экспериментов при моделировании фрактальных очередей // Омский научный вестник. 2016. №3 (147). С. 87-92.
12. Задорожный, В. Н. Предпосылки создания фрактальной теории массового обслуживания / В. Н. Задорожный // Омский научный вестник. 2010. № 2 (90). С. 182-187.
13. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и распределение Парето // Труды ВКА им. А.Ф. Можайского. 2015. № 648. С. 28-43.
14. Рыжиков Ю.И. Алгоритмический подход к задачам массового обслуживания: монография / Ю.И. Рыжиков. СПб.: ВКА им. А.Ф. Можайского, 2013. 496 с.
15. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. New York: Freeman, 1983. 468 p.
16. Takacs L. Introduction to the Theory of Queues. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1960. 12 p.
17. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.