УДК 517.977.5

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В КЛАССЕ ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

В.В. Альсевич
Белорусский государственный университет
Беларусь, 220030, Минск, пр. Независимости, 4
E-mail: alsevichvv@mail.ru

Ключевые слова: принцип максимума, особые управления, условия оптимальности, дискретные управляющие воздействия.

Аннотация: В предлагаемой работе исследуется задача терминального управления в классе дискретных управляющих воздействий. Получены необходимые условия оптимальности особых управлений для частного случая правой части системы и выпуклого множества управляющих воздействий.

1. Введение

Как известно, основным результатом теории оптимального управления является принцип максимума Л.С. Понтрягина [1]. К настоящему времени уже имеется фактически необозримое множество источников, в которых не только доказывается принцип максимума для решенных задач управления, но приводятся либо аналоги этого принципа, либо доказываются другие результаты.

Но принцип максимума не всегда работает. Тогда привлекают условия оптимальности *особых управлений*. Не приводя подробного объяснения этого утверждения, которое известно каждому, кто занимается оптимальным управлением, напомним лишь вкратце некоторые факты, которые потребуются в дальнейшем.

Рассмотрим простейшую задачу терминального управления

(1) $$J(u) = \varphi(x(t^*)) \to \min,$$

(2) $$\dot{x} = f(x,u),\ t \in T = [0,t^*],\ x(0) = x_0,$$

(3) $$u(t) \in U,\ t \in T.$$

Здесь $x = x(t) \in \mathbf{R}^n$ – *состояние* объекта в момент времени *t*; $u = u(t) \in \mathbf{R}^r$ – значение *управляющего воздействия*; *t* – скаляр (*время*); x_0 – *начальное состояние*; *T* – фиксированный промежуток времени управления, $U \subset \mathbf{R}^r$ – заданное множество. В качестве допустимых управляющих воздействий рассматриваются *r*-мерные кусочно-непрерывные функции, удовлетворяющие (3).

В дальнейшем все векторы понимаются как вектор-столбцы, штрих (′) – знак транспонирования.

Пусть $u(t)$, $t \in T$, – допустимое управление, $x(t)$, $t \in T$, – соответствующая траектория прямой системы (2), функции $\varphi(x)$, $f(x, u)$ непрерывно дифференцируемы по x, $H(x, \psi, u) = \psi' f(x, u)$ – гамильтониан, где $\psi(t)$, $t \in T$, – решение сопряженной системы

(4) $$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(x(t), \psi, u(t))}{\partial x}, \ t \in T, \ \psi(t^*) = -\frac{\partial \varphi(x(t^*))}{\partial x}.$$

Как известно, **условие максимума** состоит в следующем: *оптимальное управление* $u(t)$, $t \in T$, *и соответствующие решения* $x(t)$, $t \in T$, *прямой системы* (2) *и* $\psi(t)$, $t \in T$, *сопряженной системы* (4) *удовлетворяют условию*

(5) $$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{v \in U} H(x(t), \psi(t), v), \ t \in T.$$

Как сказано выше, условие (5) иногда вырождается и становится неэффективным при проверке управления на оптимальность. Допустимое управление $u(t)$, $t \in T$, называется *особым* [2], если существуют такие множества $\omega \subseteq T$, $\operatorname{mes} \omega > 0$, и $V(t) \subseteq U$, $t \in \omega$, включающие в себя более одного элемента, что для всех $v \in V(t)$, $t \in \omega$, выполняется тождество $H(x(t), \psi(t), u(t)) \equiv H(x(t), \psi(t), v)$. Для упрощения можно считать, что $\omega = T$, $V(t) = U$.

В [2] доказаны условия оптимальности особых управлений на языке матричных импульсов.

Указанные результаты обычно доказывались для *кусочно-непрерывных* управляющих воздействий. В предлагаемой работе результаты подобного типа приведены для *дискретных* управлений.

2. Условия оптимальности для дискретных управлений

Рассмотрим задачу (1)-(3) в классе дискретных управляющих воздействий.

Управляющее воздействие $u(t) \in U$, $t \in T$, называется *дискретным* (с периодом квантования $h > 0$), если

$$u(t) \equiv u(\tau), \ t \in [\tau, \tau + h[, \ \tau \in T_h = \{0, h, 2h, ..., t^* - h\},$$

где $h = t^* / N$, N – натуральное число. Дискретные управляющие воздействия отличаются от кусочно-постоянных тем, что их точками разрыва могут быть только моменты множества T_h.

Дискретные управляющие воздействия естественны с прикладной точки зрения, поскольку при решении нетривиальных задач неизбежно использование вычислительных устройств дискретного действия.

Несмотря на то, что динамика системы в задаче (1)–(3) описывается в непрерывном времени, условия оптимальности подобны тем, которые известны для дискретных систем [3]. В частности, в [4] доказаны принцип квазимаксимума, а для частного случая задачи (1)–(3) – дискретный принцип максимума. Приведем последний результат, поскольку он потребуется в дальнейшем.

Пусть в задаче (1)–(3) управляющие воздействия – дискретные функции и, кроме того,

(6) $$f(x, u) = f_0(x) + B(x)u, \ U \text{ – выпуклый компакт,}$$

причем функции $f_0(x)$, $B(x)$ непрерывно дифференцируемы.

Теорема 1 (***дискретный принцип максимума***) [4]. *Оптимальное управление* $u(t)$, $t \in T$, *в задаче* (1)–(3), (6) *вместе с соответствующими решениями* $x(t)$, $t \in T$, *прямой* *системы* (2) *и* $\psi(t)$, $t \in T$, *сопряженной системы* (4) *удовлетворяет условию максимума*

(7) $$\int_t^{t+h} H(x(s),\psi(s),u(t))ds = \max_{u \in U} \int_t^{t+h} H(x(s),\psi(s),u)ds\,,\ t \in T_h\,.$$

Очевидно, условие (7) в силу вида (6) функции $f(x,u)$ принимает следующую форму

(8) $$\left(\int_t^{t+h} \psi'(s)B(x(s))ds\right)u(t) = \max_{v \in U}\left(\int_t^{t+h} \psi'(s)B(x(s))ds\right)v\,,\ t \in T_h\,.$$

Полное доказательство приведено в [4] и частично повторено ниже при доказательстве теоремы 2.

Как и в случае принципа максимума для кусочно-непрерывных управлений, условие (8) может оказаться неэффективным при проверке допустимого управления на оптимальность. В этом случае можно использовать другие условия, которые приведены в следующем разделе.

3. Условия оптимальности особых управлений

По аналогии с задачей, рассмотренной в разд. 1, введем понятие особого управления для задачи из разд. 2.

Пусть на управлении $u(t) \in U$, $t \in T$, и соответствующих решениях $x(t)$, $t \in T$, и $\psi(t)$, $t \in T$, выполняется тождество

(9) $$\left(\int_t^{t+h} \psi'(s)B(x(s))ds\right)u(t) \equiv \left(\int_t^{t+h} \psi'(s)B(x(s))ds\right)v\,,\ v \in V(t) \subseteq U\,,\ t \in \tilde{T}_h \subseteq T_h\,.$$

Управление $u(t) \in U$, $t \in T$, для которого выполняется тождество (9), назовем *особым* в задаче (1)–(4), (6).

Ситуации, согласно которым возможно тождество (9), могут быть различными. В частности, возможны случаи: *а*) на множестве $V(t)$, $t \in \tilde{T}_h$, гамильтониан не зависит от u; *б*) $\psi'(s)B(x(s)) \equiv 0$, $s \in [t, t+h[$, $t \in \tilde{T}_h$; *в*) $\int_t^{t+h} \psi'(s)B(x(s))ds = 0$, $t \in \tilde{T}_h$. Возможна и смешанная ситуация из случаев *а*)–*в*) для различных $t \in \tilde{T}_h$.

Пусть $u(t)$, $t \in T$, – особое в смысле (9) управление в задаче (1)–(3), (6), $x(t)$, $t \in T$, и $\psi(t)$, $t \in T$, – соответствующие решения прямой (2), (6) и сопряженной (4) систем соответственно, функции $f_0(x)$, $B(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы. Введем в рассмотрение матричную ($n \times n$)-функцию $\Psi(t)$, $t \in T$, являющуюся решением матричного уравнения

(10) $$\dot{\Psi}(t) = -\frac{\partial f'(x(t),u(t))}{\partial x}\Psi - \Psi\frac{\partial f(x(t),u(t))}{\partial x} + \frac{\partial^2 H(x(t),\psi(t),u(t))}{\partial x^2}\,,\ t \in T\,,$$

(11) $$\Psi(t^*) = -\frac{\partial^2 \varphi(x(t^*))}{\partial x^2}\,.$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *Для оптимальности особого в смысле* (9) *управления* $u(t)$, $t \in T$, *в задаче* (1)-(3), (6) *необходимо, чтобы вдоль него и соответствующих решений* $x(t)$, $t \in T$, *прямой системы* (2), (6), $\psi(t)$, $t \in T$, *сопряженной системы* (4), $\Psi(t)$, $t \in T$, *системы* (10), (11) *выполнялись условия:*

- *для* $t \in T \setminus \tilde{T}_h$ *условие максимума* (8);
- *для* $t \in \tilde{T}_h$ *условие*

(12) $$(v-u(t))'\left(\int_t^{t+h}\left(B'(x(\tau))\Psi(\tau)+\left(\frac{\partial\psi'(\tau)B(x(\tau))}{\partial x}\right)'\right)\int_t^{\tau}B(x(s)dsd\tau\right)(v-u(t)\le 0$$

$\forall\ v \in V(t)$, $t \in \tilde{T}_h$.

Доказательство теоремы 2. Приведем лишь основные моменты доказательства теоремы. Оно основано на формуле приращения второго порядка критерия качества (1)

(13) $$\Delta J(u)=J(\overline{u})-J(u)=\varphi(\overline{x}(t^*))-\varphi(x(t^*))=$$
$$=\frac{\partial\varphi'(x(t^*))}{\partial x}\Delta x(t^*)+\frac{1}{2}\Delta x'(t^*)\frac{\partial^2\varphi(x(t^*))}{\partial x^2}\Delta x(t^*)+o(\|\Delta x(t^*)\|^2),$$

где $u(t)$, $t \in T$, – оптимальное управление, $\overline{u}(t)$, $t \in T$, – любое другое допустимое управление, $x(t)$, $\overline{x}(t)$, $t \in T$, – соответствующие решения системы (2), $\Delta x(t)=\overline{x}(t)-x(t)$, и специальной игольчатой вариации управления, приведенной ниже.

В силу (4), (10), (11) формула (13) может быть приведена к виду:

(14) $$\Delta J(u)=-\sum_{t\in T_h}\int_t^{t+h}\Delta_{\overline{u}(\tau)}H(x(\tau),\psi(\tau),u(\tau))d\tau-$$
$$-\sum_{t\in T_h}\int_t^{t+h}\Delta_{\overline{u}(\tau)}\left(\frac{\partial H'(x(\tau),\psi(\tau),u(\tau))}{\partial x}+f'(x(\tau),u(\tau))\Psi(\tau)\right)\Delta x(\tau)d\tau+\eta,$$

где $\Delta_v H(x,\psi,u)=H(x,\psi,v)-H(x,\psi,u)$, η – некоторый остаточный член, имеющий порядок малости $o(\|\Delta x(t)\|^2)$, $t \in T$, вид которого, как и вид разложения (14), можно найти в [2], и в силу ограниченности объема статьи здесь не приводится.

Доказательство результатов проводится от противного.

Сначала рассмотрим $t \in T \setminus \tilde{T}_h$. Пусть $\theta \in T \setminus \tilde{T}_h$, $\overline{u}(\theta)=\overline{v}\in U$ – момент времени и управление, в которые не выполняется условие максимума (8), т.е.

(15) $$\left(\int_\theta^{\theta+h}\psi'(s)B(x(s))ds\right)(\overline{v}-u(\theta))=\alpha>0.$$

Построим игольчатую вариацию управления в следующем виде:

(16) $$\Delta_{\theta v(\varepsilon)}u(t)=\begin{cases}v(\varepsilon)-u(t), & t\in[\theta,\theta+h[,\\ 0, & t\notin[\theta,\theta+h[,\end{cases}$$

где

(17) $$v(\varepsilon)=u(\theta)-\varepsilon(\overline{v}-u(\theta)).$$

Очевидно, что в силу выпуклости множества U при $0\le\varepsilon\le 1$ будем иметь: $v(\varepsilon)\in U$.

В [4] показано, что на вариации (16), (17) справедлива оценка

(18) $$\|\Delta x(t)\|\le K\varepsilon,\ K>0,\ t\in T.$$

С учетом этой оценки и в силу вида (6) функции $f(x,u)$ из формулы приращения (14) получим:

$$\Delta J(u) = -\varepsilon \left(\int\limits_{\theta}^{\theta+h} \psi'(s) B(x(s)) ds \right) (\overline{v} - u(\theta)) + o(\varepsilon) = -\alpha\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Из этой формулы с учетом предположения (15) для достаточно малых $\varepsilon > 0$ будем иметь $\Delta J(u) < 0$, что противоречит оптимальности управления $u(t)$, $t \in T$.

Рассмотрим теперь $t \in \tilde{T}_h$. Пусть $\theta \in \tilde{T}_h$, $\overline{u}(\theta) = \overline{v} \in V(\theta)$ – момент времени и управление, в которые не выполняется условие (12), т.е.

$$(19) \qquad (\overline{v} - u(\theta))' \left(\int\limits_{\theta}^{\theta+h} \left(B'(x(\tau))\Psi(\tau) + \left(\frac{\partial \psi'(\tau) B(x(\tau))}{\partial x} \right)' \right) \int\limits_{\theta}^{\tau} B(x(s) ds d\tau \right) (\overline{v} - u(\theta) > 0.$$

Построим вариацию (16), (17). Можно показать, что в силу оценки (18) справедливо соотношение

$$(20) \qquad \Delta_{\theta v(\varepsilon)} x(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \theta], \\ \varepsilon \left(\int\limits_{\theta}^{t} B(x(s)) ds \right) (\overline{v} - u(\theta)) + o_1(\varepsilon), & t \in [\theta, \theta + h[, \\ o_2(\varepsilon), & t \notin [\theta, \theta + h[. \end{cases}$$

В силу (9) первая сумма в (14) на вариации (16), (17) обращается в ноль, $\eta = o(\varepsilon^2)$, а от второй суммы останется одно слагаемое, которое согласно (20) и виду (6) функции $f(x, u)$ будет равно $\varepsilon^2 \beta$, где число β равно левой части неравенства (19), т.е. β>0. Таким образом, будем иметь: $\Delta J(u) = -\beta\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) < 0$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$, что противоречит оптимальности управления $u(t)$, $t \in T$.

Теорема 2 доказана.

Пример. Рассмотрим задачу: $J(u) = x_2(t^*) \to \min$, $\dot{x}_1 = x_1 + u$, $\dot{x}_2 = -ux_1$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $t \in T = [0, t^*]$, $|u(t)| \leq 1$, $t \in T$.

На управлении $u(t) \equiv 0, t \in T$, система принимает вид: $\dot{x}_1 = x_1$, $\dot{x}_2 = 0$, а ее решение $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 0$, $t \in T$. Сопряженная система (4) на этом управлении: $\dot{\psi}_1 = -\psi_1$, $\dot{\psi}_2 = 0$, $\psi_1(t^*) = 0$, $\psi_2(t^*) = -1$. Ее решение $\psi_1(t) \equiv 0$, $\psi_2(t) \equiv -1$, $t \in T$. Таким образом, имеем: $H(x(t), \psi(t), v) = 0 \ \forall |v| \leq 1, t \in T$, т.е. гамильтониан не зависит от управления, следовательно управление $u(t) \equiv 0, t \in T$, особое на всем временном отрезке.

Система (10), (11) для матричных импульсов на этом управлении и полученных решениях прямой и сопряженной систем имеет вид:

$$\dot{\Psi}_{11} = -2\Psi_{11}, \ \dot{\Psi}_{12} = -\Psi_{12}, \ \dot{\Psi}_{21} = -\Psi_{21}, \ \dot{\Psi}_{22} = 0, \ \Psi(t^*) = 0.$$

Ее решение $\Psi(t) \equiv 0$, $t \in T$. Проверяем условие (12). Оно примет вид: $h^2 v^2 / 2 \leq 0$, которое неверно для всех $v \neq 0$. Таким образом управление $u(t) \equiv 0, t \in T$, не оптимально.

Список литературы

1. Математическая теория оптимальных процессов / 4-е изд., стереотипное / Л.С. Понтрягин и др. М.: Наука, 1983. 393 с.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973, 256 с. (Переизд. М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2012. 256 с.)
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 508 с.
4. Методы оптимизации: пособие / Р. Габасов и др. Минск: Четыре четверти, 2011. 472 с.