

УДК 517.977

МЕТОД УЛУЧШЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧЕСКИХ ПО СОСТОЯНИЮ ДНС С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ КРИТЕРИЯМИ

И.В. Расина

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН

Россия, 152021, Ярославская область, Переславский район, с. Вельково, ул. Петра Первого, д. 4
«а».

E-mail: irinarasina@gmail.com

О.В. Даниленко

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: ol.baturina@mail.ru

Ключевые слова: дискретно-непрерывные системы, оптимальное управление, достаточные условия оптимальности, метод улучшения управления, задачи управления.

Аннотация: Рассматриваются линейно-квадратические по состоянию дискретно-непрерывные системы (ДНС) для случая, когда все однородные подсистемы нижнего уровня не только связаны общим функционалом, но имеют и свои собственные цели. Для указанного класса на основе аналога достаточных условий оптимальности типа Кротова строится метод улучшения управления и приводится иллюстративный пример.

1. Линейно-квадратические по состоянию дискретно-непрерывные процессы

Модель ДНС представляет собой двухуровневую управляемую систему вида:

$$x^0(k+1) = x^0(k) + \frac{1}{2}a(k)|x|^2 + b(k, u), \quad a, b \geq 0, \quad x^0 \in \mathbb{R},$$

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k, u), \quad x \in \mathbb{R}^{m(k)},$$

$$k \in \mathbf{K} = \{k_I, k_I + 1, \dots, k_F\}, \quad u \in \mathbf{U}(k, x) \subset \mathbb{R}^{r(k)},$$

где k — номер шага (этапа), $\mathbf{U}(k, x)$ — заданное при каждом k и x множество, $A(k)$ $B(k, u)$ — матрицы размеров $m(k) \times m(k)$, $m(k) \times 1$ соответственно.

На некотором подмножестве $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K}$, $k_F \notin \mathbf{K}'$ действует непрерывная система нижнего уровня

$$\dot{x}^c = \frac{1}{2}a^c(t)|x^c|^2 + b^c(t, u^c), a^c \geq 0, \quad x^{c0} \in \mathbb{R},$$

$$\dot{x}^c = A^c(k, t)x^c + B^c(k, t, u^c), \quad x^c \in \mathbb{R}^{n(k)}, \quad t \in \mathbf{T}(z) = [t_I(z), t_F(z)],$$

$$x^c \in \mathbf{X}^c(z, t) \subset \mathbb{R}^{n(k)}, \quad u^c \in \mathbf{U}^c(z, t, x^d) \subset \mathbb{R}^{p(k)},$$

где $A^c(k, t)$, $B^c(k, t, u^c)$ — матрицы размеров $n(k) \times n(k)$, $n(k) \times 1$, и для которой на отрезке $[t_I(z), t_F(z)]$ задана промежуточная цель в виде функционала:

$$I^k = \int_{\mathbf{T}(z(k))} (a^{0T}(k)x^c + b^0(k, u^c) + \frac{1}{2}a^{1c}(t)|x^c|^2 + b^{1c}(t, u^c))dt \rightarrow \inf.$$

При этом оператор правой части дискретной системы имеет вид $x^0(k+1) = x^0(k) + \frac{1}{2}\beta(k)|x_F^c|^2$, $x(k+1) = \theta(k)x^c(k, t_F)$, $k \in \mathbf{K}'$, $x^c(k, t_I) = \xi(k)x$, $x^{0c}(k, t_I) = \frac{1}{2}\xi^1(k)|x|^2$, где через ξ , θ , β обозначены матрицы соответствующих размеров. Здесь $z = (k, x)$ — совокупность переменных верхнего уровня, играющая на нижнем уровне роль параметров.

Решением этой двухуровневой системы считается набор $m = (x^0(k), x(k), u(k))$, где при $k \in \mathbf{K}'$: $u(k) = (u^d(k), m^c(k))$, $m^c(k) \in \mathbf{D}^c(z(k))$, (называемый *дискретно-непрерывным процессом*), где $m^c(k)$ — непрерывный процесс $(x^{c0}, x^c(k, t), u^c(k, t))$, $t \in \mathbf{T}(z(k))$, а $\mathbf{D}^c(z)$ — множество допустимых процессов m^c , удовлетворяющих указанной дифференциальной системе при кусочно-непрерывных $u^c(k, t)$ и кусочно-гладких $x^c(k, t)$ (на каждом дискретном шаге k). Совокупность элементов m , удовлетворяющих всем вышеперечисленным условиям, обозначим через \mathbf{D} и назовем множеством допустимых дискретно-непрерывных процессов.

Рассматривается задача о поиске минимума на \mathbf{D} функционала $I = l^T x(k_F) + \frac{1}{2}\kappa|x(k_F)|^2 + d$, где l — вектор, κ — матрица, d — константа, при фиксированных $k_I = 0$, $k_F = K$, $x(k_I)$ и дополнительных ограничениях $x(k) \in \mathbf{X}(k)$, $x^c \in \mathbf{X}^c(z, t)$, $\mathbf{X}(k)$, $\mathbf{X}^c(z, t)$ — заданные множества.

2. Метод улучшения и алгоритм

Для построения метода воспользуемся достаточными условиями оптимальности [1], принципами расширения [2] и локализации [3]. Предположим также, что $\mathbf{U}(k, x) = \mathbb{R}^{r(k)}$, $\mathbf{U}^c(z, t, x^d) = \mathbb{R}^{p(k)}$.

Рассмотрим вспомогательный функционал

$$I_\alpha = L_\alpha = \alpha I + \frac{1}{2}(1 - \alpha) \left(\sum_{\mathbf{K} \setminus \mathbf{K}' \setminus k_F} |\Delta u(k)|^2 + \sum_{\mathbf{K}'} \int_{\mathbf{T}(z)} |\Delta u^c(k, t)|^2 dt \right),$$

где $\alpha \in [0, 1]$,

и его приращение:

$$\Delta L_\alpha \approx G_x^T \Delta x - \sum_{\mathbf{K} \setminus \mathbf{K}'} (R_x^T \Delta x + R_u^T \Delta u + \frac{1}{2} \Delta u^T R_{uu} \Delta u) - \sum_{\mathbf{K}'} \left((G_x^{cT} \Delta x + G_{x_F^c}^{cT} \Delta x_F^c) - \right.$$

$$- \int_{\mathbf{T}(k,z)} (R_x^{c\Gamma} \Delta x + R_{x^c}^{c\Gamma} \Delta x^c + R_{u^c}^{c\Gamma} \Delta u^c + \frac{1}{2} \Delta u^{c\Gamma} R_{u^c u^c}^c \Delta u^c) dt),$$

где R, G, R^c, G^c, L — конструкции достаточных условий оптимальности [1], а $\Delta u = u - u^I$, $\Delta u^c = u^c - u^{cI}$, $\Delta x = x - x^I$, $\Delta x^c = x^c - x^{cI}$, $m^I = (u^{cI}, x^I, u^{cI}, x^{cI})$ — заданный элемент из класса D . Предположим, что матрицы R_{uu} и $R_{u^c u^c}^c$ отрицательно определены (этого всегда можно добиться за счет выбора параметра α [3] и найдем минимум ΔL_α по $\Delta u, \Delta u^c, \Delta x, \Delta x_F^c, \Delta x^c$. При этом зададим функции φ, φ^c в виде:

$$\varphi = \psi^T(k) x(k) + \frac{1}{2} \Delta x^T(k) \sigma(k) \Delta x(k) + x^0,$$

$$\varphi^c = \psi^{c\Gamma}(k, t) x^c(k, t) + \frac{1}{2} \Delta x^{c\Gamma}(k, t) \sigma^c(k, t) \Delta x^c(k, t) - x^{c0},$$

где ψ, ψ^c — вектор-функции, а σ, σ^c — матрицы соответствующих размеров.

Тогда из сформулированных условий получим:

$$\Delta u = -R_{uu}^{-1} R_u, \quad \Delta u^c = -R_{u^c u^c}^{c-1} R_{u^c}^c,$$

$$\psi(k_F) = -\alpha l, \quad \psi(k) = A(k)^T \psi(k+1) + A(k)^T \sigma(k+1) B(k),$$

$$\sigma(k) = A(k)^T \sigma(k+1) - a(k), \quad k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}', \quad \sigma(k_F) = -\kappa,$$

$$\psi(k) = \xi^T \psi^c(k, t_I), \quad \psi^c(k, t_F) = \theta_{x_F^c} \psi(k+1) = H_{x_F^c},$$

$$\sigma(k) = \sigma^c(t_I) \xi - \xi^1, \quad \sigma^c(t_F) = \theta_{x_F^c}^T \sigma(k+1) + \beta, \quad k \in \mathbf{K}'$$

$$\dot{\psi}^c(k, t) = -A(k, t)^{c\Gamma} \psi^c - \sigma^c B^c(k, t) - a^0,$$

$$\dot{\sigma}^c = -A(k, t)^{c\Gamma} \sigma^c - a^c(k, t) - a^{1c}(k, t).$$

Обозначим

$$H(k, x, u, \psi(k+1)) = \psi^T(k+1)(A(k)x(k) + B(k, u)) - b(k) -$$

$$-\frac{1}{2}(1-\alpha)|\Delta u|^2, \quad k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}' \setminus k_F,$$

$$H^c(k, t, x, x^c, u^c, \psi^c(k, t)) = \psi^{c\Gamma}(k, t)(A^c(t)x^c + B^c(t, u^c)) -$$

$$-(a^{0\Gamma}(k)x^c + b^0(k, u^c)) - b^{1c}(k, u^c) - \frac{1}{2}(1-\alpha)|\Delta u^c(k, t)|^2.$$

Тогда

$$R_u = H_u + B_u^T A \sigma x + B_u^T \sigma B, \quad R_{uu} = H_{uu} + B_{uu}^T A \sigma x + \sigma B_u + B_u^T \sigma + B^T \sigma B_{uu},$$

$$R_{u^c}^c = H_{u^c}^c + B_{u^c}^{c\Gamma} \sigma^c x^c, \quad R_{u^c u^c}^c = H_{u^c u^c}^c + B_{u^c u^c}^{c\Gamma} \sigma^c x^c.$$

Заметим, что формулы для первых и вторых производных функций R, R^c линейно зависят от переменных состояния соответственно верхнего и нижнего уровня. Следовательно, полученное решение представляет собой приближенный синтез оптимального управления.

3. Итерационная процедура

На основе полученных соотношений можно сформулировать следующую итерационную процедуру на шаге s .

1. «Слева направо» просчитывается исходная ДНС при $u = u_s(k)$, $u^c = u_s^c(k, t)$ и заданных начальных условиях, получаются соответствующие траектории $x_s(k)$, $x_s^c(k, t)$.
2. «Справа налево» разрешается ДНС относительно $\psi(k)$, $\psi^c(k, t)$, $\sigma(k)$, $\sigma^c(k, t)$.
3. Находятся Δu , Δu^c и новые управления $u_{s+1}(k) = u_s(k) + \Delta u$, $u_{s+1}^c(k) = u_s^c(k) + \Delta u^c$.
4. Просчитывается «слева направо» исходная ДНС при новых управлениях с заданными начальными условиями.

Процесс итераций заканчивается, когда $|I_{s+1} - I_s| \approx 0$ с заданной точностью.

Теорема 1. Пусть для заданной ДНС построена указанная итерационная процедура, и функционал I ограничен снизу. Тогда она генерирует улучшающую последовательность элементов $\{m_s\} \in \mathbf{D}$, сходящуюся по функционалу, т.е. существует число I^* , такое что $I^* \leq I(m_s)$, $I(m_s) \rightarrow I^*$.

4. Пример

Проиллюстрируем один шаг метода на примере. Пусть задана ДНС:

$$\dot{x}^{c0} = \frac{1}{2}(x^c)^2, \quad \dot{x}^c = x^c + \frac{1}{3}(u_1^c)^3, \quad x_1^c(0) = 1,$$

$$f^0(0, t, x^c, u_1^c) = (u_1^c)^2 - x^c, \quad t \in [0; 0, 2];$$

$$\dot{x}^{c0} = \frac{1}{2}(x^c)^2 + u_2^c, \quad \dot{x}^c = (t - u_2^c)^2,$$

$$f^1(1, t, x_1^c, u_2^c(t)) = (x^c)^2 + (u_2^c)^2, \quad t \in [0, 2; 0, 4];$$

$$I = x^c(0, 4) \rightarrow \min.$$

Нетрудно видеть, что $K = 0, 1, 2$. Поскольку роль связующей переменной на двух рассматриваемых этапах играет x^c , то в терминах этой переменной легко записать процесс верхнего уровня: $x(0) = x^c(0; 0)$, $x(1) = x^c(0; 0, 2)$, $x(2) = x^c(1; 0, 4)$, $x(1) = x^c(0; 0, 2) = \theta$, $x^c(1; 0, 2) = x(1) = \xi$. Тогда $I = x(2)$.

В качестве начального приближения были выбраны значения $u_1^c(0, t) = u_2^c(1, t) = 1$, и $\alpha = 0, 05$.

Таким образом, имеем:

$$k = 0 : a^c = 1, b^c = 0, A^c = 1, B^c = \frac{1}{3}(u_1^c)^3,$$

$$a^0 = -1, b^0 = 0, a^{1c} = 0, b^{1c} = (u_1^c)^2,$$

$$k = 1 : a^c = 0, b^c = (u_2^c)^2, A^c = 0, B^c = (t - u_2^c)^2,$$

$$\begin{aligned}
a^0 &= 0, \quad b^0 = 0, \quad a^{1c} = 1, \quad b^{1c} = (u_2^c)^2, \\
H^c(0) &= \psi^c(x^c + \frac{1}{3}(u_1^c)^3) - \frac{1}{2}(x^c)^2 - (u_1^c)^2 - \frac{1}{2}(1 - \alpha)(\Delta u_1^c)^2, \\
H^c(1) &= \psi^c(t - u_2^c)^2 - \frac{1}{2}(x^c)^2 - u_2^c - (u_2^c)^2 - \frac{1}{2}(1 - \alpha)(\Delta u_2^c)^2, \\
R_{u_1^c}^c(0) &= \psi^c(u_1^c)^2 - 2u_1^c - (1 - \alpha)\Delta u_1^c + (u_1^c)^2 \sigma^c x^c, \\
R_{u_1^c u_1^c}^c(0) &= 2\psi^c u_1^c - 2 - (1 - \alpha) + 2u_1^c \sigma^c x^c, \\
R_{u_2^c}^c(1) &= -2\psi^c(t - u_2^c) - 1 - 2u_2^c - (1 - \alpha)\Delta u_2^c - 2(t - u_2^c)\sigma^c x^c, \\
R_{u_2^c u_2^c}^c(1) &= 2\psi^c - 2 - (1 - \alpha) + 2\sigma^c x^c.
\end{aligned}$$

Уравнения:

$$\begin{aligned}
\psi(2) &= -\alpha, \quad \psi(1) = x^c(1; 0, 2)\psi^c(1; 0, 2), \quad \psi^c(0; 0, 2) = \psi(2), \\
\sigma^c(0; 0, 2) &= \sigma(2), \\
\psi^c(1; 0, 4) &= 0, \quad \sigma^c(1; 0, 4) = 0, \\
\dot{\psi}^c(1, t) &= -\sigma^c(t - u_2^c)^2, \quad \dot{\sigma}^c(1, t) = -1, \\
\dot{\psi}^c(0, t) &= \psi^c - \sigma^c \frac{1}{3}(u_1^c)^3 + 1, \quad \dot{\sigma}^c(1, t) = -\sigma^c - 1.
\end{aligned}$$

При этом $I^1 = 1,82$. После выполнения одного шага $I^2 = 1,62$; $I^2 < I^1$, что подтверждает работоспособность предложенного алгоритма.

Список литературы

1. Расина И.В. Дискретно-непрерывные системы с промежуточными критериями // Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВСППС'2017), г. Алушта. М.: Изд-во МАИ, 2017. С. 699-701.
2. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985. 228 с.
3. Гурман В.И., Расина И.В. О практических приложениях достаточных условий сильного относительного минимума // Автоматика и телемеханика. 1979. № 10. С. 12-18.