УДК 517.95

О СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

М.А. Сагадеева
Южно-Уральский государственный университет
Россия, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76
E-mail: sagadeevama@susu.ru

А.В. Келлер
Южно-Уральский государственный университет
Россия, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76
E-mail: kellerav@susu.ru

Г.А. Свиридюк
Южно-Уральский государственный университет
Россия, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76
E-mail: sviridyukga@susu.ru

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, разрешающие потоки операторов, равномерная сходимость, точное решение, приближенное решение.

Аннотация: В докладе приводится описание численного решения задачи оптимального управления решениями нестационарной системы леонтьевского типа с начальным условием Шоуолтера – Сидорова. Для построения этого решения приводятся теоретические результаты о виде решения такой системы в нестационарном случае, т.е. когда одна из матриц системы умножена на скалярную функцию. Приводится вид точного решения и алгоритм нахождения приближенного решения задачи оптимального управления. Основной целью доклада является более подробное изучение сходимости приближенных решений рассматриваемой задачи оптимального управления к точному решению.

1. Задача оптимального управления

Для вектор-функций $x : [0, \tau] \to \mathbb{R}^n$ рассмотрим неоднородную линейную систему дифференциальных уравнений

(1) $$L\dot{x}(t) = Mx(t) + Bu(t)$$

с начальным условием Шоуолтера – Сидорова

(2) $$[R^L_\nu(M)]^{p+1}(x(0) - x_0) = 0,$$

где L, M и B – квадратные матрицы порядка n, причем $\det L = 0$, а также $R^L_\nu(M) = (\nu L - M)^{-1}L$, $u : [0, \tau] \to \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}_+$. Здесь мы предполагаем, что матрица M – (L, p)-регулярна (т.е. существует $\nu \in \mathbb{C}$ такая, что $\det(\nu L - M) \neq 0$, а ∞ является полюсом $(\nu L - M)^{-1}$ порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$). Системы вида (1) при $\det L = 0$ принято называть системами леонтьевского типа (СЛТ), имея ввиду, что одним из частных случаев системы (1) является широко известная система В.В. Леонтьева «затраты-выпуск» с учетом запасов. Системы вида (1) широко изучаются в различных аспектах и имеют множество приложений (см. например, [1, 2]). Методы нахождения численных решений таких систем, применяемые в данной работе, основаны на применении теории уравнений соболевского типа [3], так как системы леонтьевского типа являются конечномерным аналогом этих уравнений [4]. Применение методов этой теории также обуславливает замену классических начальных условий Коши на условия Шоуолтера – Сидорова [5].

Введем в рассмотрение функционал качества

$$J(u) = \alpha \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \|z^{(q)}(t) - z_0^{(q)}(t)\|^2_{\mathfrak{Z}} dt + (1-\alpha) \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^\tau \langle N_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \rangle_{\mathfrak{U}} dt, \tag{3}$$

где $\alpha \in (0, 1]$, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{Z}$ – гильбертовы пространства, $z = Cx$, C и N_q – квадратные матрицы порядка n, $\theta = 0, 1, \ldots, p+1$, $\tau \in \mathbb{R}_+$. Задача оптимального управления решениями задачи (1), (2) состоит в отыскании вектор-функции v, минимизирующей функционал (3), то есть

$$J(x, u) = \min_{(x,u) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_\partial} J(x, u), \tag{4}$$

где $\mathfrak{U}_\partial$ – некоторое ограниченное, выпуклое, замкнутое подмножество пространства управлений $\mathfrak{U}$. Задачи оптимального управления для стационарных уравнений соболевского типа изучались во многих работах (обзор этих результатов можно найти в [6]). Численные решения задачи оптимального управления для стационарных СЛТ изучались во многих работах (см. например, [7–9]).

В экономических приложениях более интересными являются системы, коэффициенты которой зависят от времени, поэтому в данной работе исследуется вопрос численного решения задачи оптимального управления решениями задачи Шоуолтера – Сидорова для нестационарной системы лентьевского типа (НСЛТ) вида

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + Bu(t), \tag{5}$$

где $a : [0, \tau] \to \mathbb{R}_+$ – скалярная функция, описывающая изменение во времени параметров взаимовлияния состояний исследуемой системы. Также как и для стационарной СЛТ в нестационарном случае методы исследования основаны на применении методов теории уравнений соболевского типа. Нестационарные уравнения соболевского типа рассмотрены во многих работах (см. например, [10]). Для построения решения НСЛТ (5) используются потоки разрешающих операторов [11]. Построение численного решения задачи оптимального управления для НСЛТ описано в [12]. В данном докладе обсуждается сходимость приближенных решений к точному.

2. Точные и приближенные решения

Пусть L, M и B – квадратные матрицы порядка n. Множества $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : \det(\mu L - M) \neq 0\}$ и $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ будем называть соответственно *L-резольвентным множеством* и *L-спектром* матрицы M [3]. Очевидно, что L-резольвентное множество матрицы M является пустым множеством, либо L-спектр матрицы M состоит из конечного множества точек. Отметим также, что при изменении базиса пространства $\mathbb{R}^n$ множества $\rho^L(M)$ и $\sigma^L(M)$ не изменяются.

Для комплексной переменной $\mu \in \mathbb{C}$ определим матрично-значные функции $(\mu L - M)^{-1}$; $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$ и будем их называть соответственно *L-резольвентой, правой* и *левой L-резольвентами* матрицы M.

Определение 1. Матрица M называется *L-регулярной*, если $\rho^L(M) \neq \varnothing$ и *(L,p)-регулярной*, при p равном порядку полюса в ∞ для функции $\det(\mu L - M)^{-1}$.

Замечание 1. Если бесконечность является устранимой особой точкой L-резольвенты матрицы M, то $p = 0$. Также заметим, что для квадратных матриц параметр p не может превосходить размерности пространства n.

Теорема 1. [11] *Пусть матрица M (L,p)-регулярна и $\det M \neq 0$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in C^{p+1}([0,\tau];\mathbb{R}^n)$ и $a \in C^{p+1}([0,\tau];\mathbb{R}_+)$ существует единственное решение задачи Шоуолтера – Сидорова (2) для НСЛТ (5) вида*

$$
\begin{aligned}
x(u,t) = \lim_{k\to\infty} x_k(u,t) = \lim_{k\to\infty} \Bigg[&\left(\left(L - \frac{1}{k} M \int\limits_0^t a(\zeta)d\zeta \right)^{-1} L \right)^k x_0 + \\
+ \int\limits_0^t &\left(\left(L - \frac{1}{k} M \int\limits_s^t a(\zeta)d\zeta \right)^{-1} L \right)^k \left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} \left(k L^L_k(M) \right)^p Bu(s)ds + \\
+ \sum_{q=0}^{p} &\left(M^{-1} \left(\mathbb{I}_n - \left(k L^L_k(M) \right)^{p+1} \right) L \right)^q M^{-1} \left(\left(k L^L_k(M) \right)^{p+1} - \mathbb{I}_n \right) \left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^q \frac{Bu(t)}{a(t)} \Bigg],
\end{aligned}
\tag{6}
$$

причем выражение $\left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^q$ в последнем слагаемом означает последовательное применение q раз данного оператора.

Замечание 2. В теореме 1 требование $\det M \neq 0$ не является ограничительным. Так как если $\det M = 0$, то к системе $L\dot{x}(t) = Mx(t) + f(t)$ можно применить замену переменных $x(t) = e^{\kappa t} y(t)$, после чего матрица правой части примет вид $\widetilde{M} = M - \kappa L$, причем $\det \widetilde{M} \neq 0$.

Выражением (6) определяется точное $x(u,t)$ и приближенное $x_k(u,t)$ решения задачи (2), (5).

Аналогично результатам в [12], введем в рассмотрение пространства управления

$$\mathfrak{U} = H^{p+1}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L_2(0,\tau;\mathbb{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2(0,\tau;\mathbb{R}^n),\ p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$$

и состояний $\quad \mathfrak{X} = H^1(\mathbb{R}^n) = \{x \in L_2(0,\tau;\mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2(0,\tau;\mathbb{R}^n)\}$.

Определение 2. Пара $(v, x(v)) \in \mathfrak{U}_\partial \times \mathfrak{X}$ называется *решением задачи оптимального управления*, если $x(v)$ является решением задачи (2), (5) и при этом v является решением (4) с функционалом вида (3).

Теорема 2. *Пусть матрица M (L,p)-регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $\det M \neq 0$. Тогда при любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $a \in C^{p+1}([0,\tau];\mathbb{R}_+)$ существует единственное пара $(v, x(v))$ такая, что $x(v)$ – сильное решение задачи Шоуолтера – Сидорова (2) для НСЛТ (5), а v – оптимальное управление задачи (3), (4), причем они связаны следующим образом $x(v) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k(v,t)$*

Опишем вкратце численный метод решения задач оптимального управления для НСЛТ (5) предложенный в [12]. Для построения численного решения будем рассматривать задачу на конечномерном подпространстве $\mathfrak{U}^\ell = H_\ell^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ пространства управления $\mathfrak{U}$. Данное подпространство содержит вектор-функции $u^\ell = u^\ell(t)$ вида

$$u^\ell(t) = \mathrm{col}\left(\sum_{j=0}^{\ell} c_{1j}\varphi_j(t), \sum_{j=0}^{\ell} c_{2j}\varphi_j(t), \ldots \sum_{j=0}^{\ell} c_{nj}\varphi_j(t)\right), \tag{7}$$

где $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ образуют базис в гильбертовом пространстве управлений $\mathfrak{U}$. Учитывая вид (3), необходимо чтобы $\ell > p$. Заменим u в (3) и (5) на u^ℓ и будем исследовать задачу оптимального управления

$$J(v^\ell) = \min_{u^\ell \in \mathfrak{U}^\ell_\partial} J(u^\ell), \qquad \alpha \in (0,1].$$

В качестве решения этой задачи получим пару (v^ℓ, x^ℓ), причем $x^\ell = x(v^\ell, t) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k(v^\ell, t)$. Здесь и далее $\mathfrak{U}^\ell_\partial = \mathfrak{U}_\partial \cap \mathfrak{U}^\ell$.

Пару (v_k^ℓ, x_k^ℓ) будем называть *приближенным решением задачи оптимального управления* (2) – (5), если x_k^ℓ является приближенным решением задачи (2), (5), а v_k^ℓ минимизирует функционал

$$J_k(u^\ell) = \alpha \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \|Cx_k^{(q)}(u^\ell,t) - z_0^{(q)}(t)\|^2 dt + (1-\alpha) \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^\tau \left\langle N_q (u^\ell)^{(q)}(t), (u^\ell)^{(q)}(t)\right\rangle dt, \tag{8}$$

т.е. $J(v_k^\ell) = \min\limits_{u^\ell \in \mathfrak{U}^\ell_\partial} J_k(u^\ell), \qquad \alpha \in (0,1].$

3. Алгоритм численного решения

Входными данными для алгоритма нахождения приближенного решения задачи оптимального управления являются: матрицы L, M и B, скалярная функция $a(t)$ и вектор-функция $z_0(t)$ для функционала (3). Также задается параметр $\alpha \in (0,1]$ и необходимый уровень точности вычислений ε.

Этап 1. Вычислим определитель $\det M$ и сравним его с нулем с заданной степенью точности ε_1. Если $|\det M| < \varepsilon_1$, то применим замену переменных $y = e^{\kappa t}x$ и продолжим выполнение алгоритма.

Этап 2. Находим значение порядка полюса $p = n - q$, где $q = \deg\det(\mu L - M)$.

Этап 3. Находим номер K, начиная с которого можно находить приближенные решения: $K = \max\{k_1, k_2\}$, где k_1, k_2 вычисляем по следующим формулам

$$k_1 = \frac{1}{d}\sum_{i=0}^{q} |d_i| + 1, \qquad k_2 = \frac{1}{dp^p}\sum_{i=0}^{q} |d_i|(p+1)^{n-1} + 1,$$

где $d = \max\left\{1, \sum\limits_{i=0}^{q} |d_i|\right\}$, а d_i – коэффициенты полинома $\det(\mu L - M)$ и d_q – его старший ненулевой коэффициент.

Этап 4. Задается длина временного интервала τ для оптимизации и количество узлов квадратурной формулы Гаусса η. Затем вычисляются веса w_j и узлы s_j квадратурной формулы Гаусса.

После этого получим формулу для вычисления $J_k(u^\ell)$

$$J_k(u^\ell) = \frac{\tau}{2} \sum_{j=0}^{2\eta} \Bigg[\alpha \|Cx_k(u^\ell, \tau_j) - z_0(\tau_j)\|^2 + \alpha \|Cx_k'(u^\ell, \tau_j) - z_0'(\tau_j)\|^2 + \\ +(1-\alpha) \sum_{q=0}^{\theta} \left\langle N_q (u^\ell)^{(q)}(\tau_j), (u^\ell)^{(q)}(\tau_j) \right\rangle \Bigg] w_j, \tag{9}$$

где $\tau_j = \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2} s_j$.

Этап 5. Вычисляются $a(\tau_j)$, которые затем кэшируются.

Этап 6. Находим $x_k(0,t)$ и $J_k(0)$ для нулевых значений c_{ij} из (7).

Этап 7. Решаем задачу минимизации для функционала (8) относительно коэффициентов c_{ij} как задачу выпуклого программирования с ограничениями, которые определяются из условий наложенных на множество $\mathfrak{U}_\partial$.

Алгоритм основан на методе покоординатного спуска с памятью. Когда вычислительная погрешность расчета функционала качества (9) достигает заданного уровня точности ε, перерасчет коэффициентов останавливается. После этих расчетов получим значения коэффициентов c_{ij}^*, с помощью которых находим приближенное оптимальное управление

$$v^\ell(t) = \mathrm{col}\left(\sum_{j=0}^{\ell} c_{1j}^* \varphi_j(t), \sum_{j=0}^{\ell} c_{2j}^* \varphi_j(t), \ldots \sum_{j=0}^{\ell} c_{nj}^* \varphi_j(t) \right).$$

Этап 8. Вычисляем $x_k^\ell = x_k(v_k^\ell, t)$ по формуле (6).

4. Сходимость приближенных решений задачи

Перейдем к обсуждению сходимости приближенных решений задачи к точному.

Лемма 1. *Пусть матрица M – (L,p)-регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\det M \neq 0$, функция $a \in C^{p+1}([0,\tau]; \mathbb{R}_+))$. Тогда пара (x^ℓ, v^ℓ) минимизирующая значение функционала (3) на компактном и выпуклом множестве $\mathfrak{U}_\partial \subset \mathfrak{U}$ и $(x^\ell, v^\ell) \rightrightarrows (x, v)$ при $\ell \to \infty$ на интервале $[0,\tau]$.*

Лемма 2. *Пусть матрица M – (L,p)-регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\det M \neq 0$, функция $a \in C^{p+1}([0,\tau]; \mathbb{R}_+))$. Тогда пара (x_k^ℓ, v_k^ℓ) является минимизирующей значение функционала (8) на компактном и выпуклом множестве $\mathfrak{U}_\partial^\ell \subset \mathfrak{U}_\partial$ и пара $(x_k^\ell, v_k^\ell) \rightrightarrows (x^\ell, v^\ell)$ на интервале $[0,\tau]$ при $k \to \infty$ и фиксированном $\ell > p$, так что $v_k^\ell \to v^\ell$ по норме $\mathfrak{U}^\ell$.*

Из теоремы о повторных пределах и предыдущих лемм очевидно следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть матрица M – (L,p)-регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\det M \neq 0$, функция $a \in C^{p+1}([0,\tau];\mathbb{R}_+))$. Пусть (x,v) – точное, а (x_k^ℓ, v_k^ℓ) – приближенное решение задачи оптимального управления (2) – (5) на выпуклом компактном множестве $\mathfrak{U}_\partial \subset \mathfrak{U}$. Тогда для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ последовательность $\{v_k^\ell\}$ сходится к v по норме в $\mathfrak{U}$, а последовательность $\{x_k^\ell\}$ сходится к $x = x(v)$ по норме в $\mathfrak{X}$ при $k \to \infty$, $\ell \to \infty$ так, что $J_k(v_k^\ell) \to J(v)$.*

Список литературы

1. Белов А.А., Курдюков А.П. Дескрипторные системы и задачи управления. М.: Физматлит, 2015. 272 с.
2. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V. Optimal measurements // XXI IMEKO World Congress "Measurement in Research and Industry". 2015. A/N 116100.
3. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston: VSP, 2003. 216 p.
4. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Khudyakov Y.V. Dynamical measurements in the view of the group operators theory // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2015. Vol. 113. P. 273-286.
5. Келлер А.В., Загребина С.А. Некоторые обобщения задачи Шоуолтера–Сидорова для моделей соболевского типа // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2015. Т. 8, № 2. С. 5-23.
6. Манакова Н.А. Математические модели и оптимальное управление процессами фильтрации и деформации // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2015. Т. 8, № 3. С. 5-24.
7. Keller A.V. On the computational efficiency of the algorithm of the numerical solution of optimal control problems for models of Leontieff type // Journal of Computational and Engineering Mathematics. 2015. Vol. 2, No. 2. P. 39-59.
8. Keller A.V., Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Khudyakov Y.V. The numerical algorithms for the measurement of the deterministic and stochastic signals // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2015. Vol. 113. P. 183-195.
9. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V., Zamyshlyaeva A.A., Khudyakov Y.V. Numerical investigation of optimal dynamic measurements // Acta IMEKO. 2018. Vol. 7, No. 2. C. 65-72.
10. Sagadeeva M.A., Sviridyuk G.A. The nonautonomous linear Oskolkov model on a geometrical graph: The stability of solutions and the optimal control problem // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2015. Vol. 113. P. 273-286.
11. Сагадеева М.А. Вырожденные потоки разрешающих операторов для нестационарных уравнений соболевского типа // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. 2017. Т. 9, № 1. С. 22-30.
12. Келлер А.В., Сагадеева М.А. Задача оптимального измерения для модели измерительного устройства с детерминированным мультипликативным воздействием и инерционностью // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2014. Т. 7, № 1. С. 134-138.